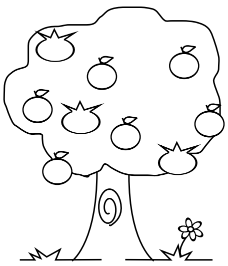
Bruno Holanda

PARIDADE, INVARIANTES E CHAPÉUS

1 Introdução

Todo número é par ou ímpar. Óbvio, não? Pois é com essa simples afirmação que vamos resolver os problemas deste capítulo.

Problema 1. No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia, um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?



Problema 2. Um jogo consiste de nove botões luminosos (de cor verde ou amarela) dispostos da seguinte forma:

1○ 2○ 3○

4○ 5○ 6○

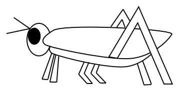
7○ 8○ 9○

Apertando um botão do bordo do retângulo, trocam de cor ele e seus vizinhos (do lado ou em diagonal). Apertando o botão do centro, trocam de cor todos os seus oito vizinhos, porém ele, não. Inicialmente, todos os botões estão verdes. É possível, apertando sucessivamente alguns botões, torná-los todos amarelos?

Problema 3. (Leningrado 1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nícolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nessas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

Problema 4. (Leningrado 1989) Um grupo de K físicos e K químicos está sentado ao redor de uma mesa. Alguns deles sempre falam a verdade e outros sempre mentem. Sabe-se que o número de mentirosos entre os físicos e químicos é o mesmo. Quando foi perguntado: "Qual é a profissão de seu vizinho da direita?", todos responderam "Químico". Mostre que K é par.

Problema 5. Um gafanhoto vive na reta coordenada. Inicialmente, ele se encontra no ponto 1. Ele pode pular uma ou cinco unidades, tanto para a direita quanto para a esquerda. Porém, a reta coordenada possui buracos em todos os pontos que são múltiplos de 4 (i.e., existem buracos nos pontos $-4, 0, 4, 8$ etc.), então ele não pode pular para esses pontos. Pode o gafanhoto chegar ao ponto 3 após 2003 saltos?



Problema 6. Existe alguma solução inteira para a equação

$$a \cdot b \cdot (a - b) = 45045?$$

Problema 7. É possível que as seis diferenças entre dois elementos de um conjunto de quatro números inteiros sejam iguais a 2, 2, 3, 4, 4 e 6?

Problema 8. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Problema 9. (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isso?

Problema 10. (Rússia 2004) É possível colocarmos números inteiros positivos nas casas de um tabuleiro 9×2004, de modo que a soma dos números de cada linha e a soma dos números de cada coluna sejam primos? Justifique sua resposta.

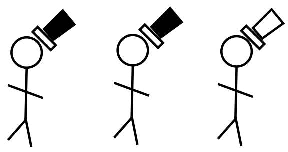
Problema 11. (Ucrânia 1997) Considere um tabuleiro pintado de preto e branco da maneira usual e, em cada casa do tabuleiro, escreva um número inteiro, de modo que a soma dos números em cada coluna e em cada linha seja par. Mostre que a soma dos números nas casas pretas é par.

Problema 12. (OBM 2017) Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro $n \times n$, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que e possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes

Problema 13. Imagine que 10 prisioneiros estejam trancados em uma cela quando chega um carcereiro com o seguinte comunicado:

— *Amanhã, todos vocês passarão por um teste. Todos vocês ficarão em fila indiana e serão colocados chapéus nas cabeças de um de vocês. Cada um poderá ver os chapéus dos que estarão à sua frente. Porém, não poderão ver os chapéus dos que estão atrás, nem seu próprio chapéu. Os chapéus serão pretos ou brancos. Feito isso, será perguntado a cada um de vocês, do último para o primeiro, em ordem, qual a cor do seu chapéu. Se a pessoa errar a cor do seu chapéu, será morta.*

Será que os prisioneiros podem montar uma estratégia para salvar pelo menos nove deles?



Problema 14. Seja $a_1, ..., a_n$ uma permutação de $1, 2, ..., n$. Mostre que

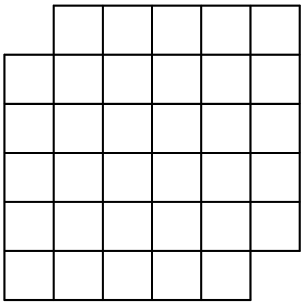
$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

é par.

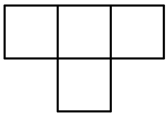
2 Tabuleiros

OBS: Nos problemas a seguir, as peças podem ser rotacionadas, refletidas ou giradas.

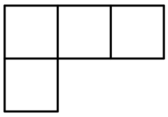
Problema 15. Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?



Problema 16. Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas T-tetraminós como abaixo?



Problema 17. Para que valores de n, m podemos cobrir um tabuleiro $n \times m$ usando apenas L-tetraminós como abaixo?

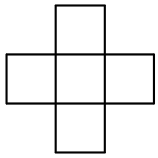


Problema 18. Sobre uma das casas de um tabuleiro infinito, existe um cubo que cobre a casa perfeitamente. A face no topo do cubo é branca, enquanto as demais faces são pretas. A cada passo, podemos tombar o cubo para um dos lados. É possível que:

(a) Após 2004 passos o cubo volte ao mesmo quadrado com a face branca para baixo?

(b) Após 2005 passos?

Problema 19. (Rússia 1997) Podemos cobrir um tabuleiro 75×75 usando dominós e cruzes (como na figura a seguir)?



Problema 20. (Rússia 2007) As faces de um cubo $9 \times 9 \times 9$ são particionas em quadradinhos da forma usual. Sua superfície é coberta por 243 tiras de papel 2×1 sem sobreposição. Uma tira é dita *dobrada* se não está apenas sobre uma face.
Prove que o número de tiras dobradas é ímpar.

3 Invariantes

Problema 21. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

Problema 22. Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.

Problema 23. Cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_n$ é 1 ou -1, e temos que:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

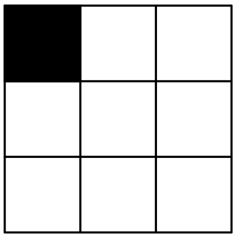
Prove que $4 \mid n$.

Problema 24. Os números $1, 2, 3, ..., 1989$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?

Problema 25. (Torneio das Cidades) Existem dez moedas em linha reta. É possível virar quatro consecutivas ou escolher cinco consecutivas e virar quatro que estão na extremidade ($\times \times \bigcirc \times \times$).

Problema 26. Em um tabuleiro 8×8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Problema 27. Em um tabuleiro 3×3 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?



Problema 28. Em um tabuleiro 8×8 as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Problema 29. (Bulgária 2004) Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco aba por um bloco b, trocar um bloco bba por um bloco a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a seqüência $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ a partir de $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$?

Problema 30. (Fortaleza 2003) Sobre uma circunferência tomamos $m+n$ pontos, que a divide em $m+n$ pequenos arcos. Nós pintamos m pontos de branco e os n restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos $m+n$ arcos um dos números $2, 1/2$ ou 1, dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca.
Calcule o produto dos números associados a cada um dos $m+n$ arcos.

Problema 31. (Cone Sul 2000) No plano cartesiano, considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de 90 no sentido anti-horário, com centro neste ponto. É possível, através de uma seqüência dessas operações, levar o triângulo de vértices (0,0);(1,0);(0,1) no triângulo de vértices (0,0);(1,0);(1,1)?

4 Bibliografia

1. Bruno Holanda e Emiliano Chagas. Primeiros Passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória. Círculos Matemáticos da OBMEP, vol 1. IMPA

2. www.obm.org.br

3. www.obmep.org.br

4. https://sites.google.com/site/bholandasite/