OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
XXIII Semana Olímpica - Natal/RN.
27 a 31 de janeiro de 2020.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Matrizes Olímpicas; o passado, o presente e o futuro!

Nível Universitário.

---

1 Introdução

Nas competições Matemáticas do nível universitário, o tema Álgebra linear, particulamente o tópico matrizes e determinantes, tem sido bastante frequente nas provas. A seguir, apresentaremos um breve resumo de alguns (poucos) fatos essenciais e frequentemente necessários para a resolução de diversos problemas olímpicos sobre o tema intercalados com algums problemas interessantes que encontramos ao longo da nossa trajetória. Passaremos rapidamente sobre os espaços vetoriais, as transformações lineares e a diagonalização de operadores lineares, visto que são temas que também aparecem nas questões olímpicas. Alguns desses problemas foram retirados de livros (que citamos nas referências no final); outros de listas encontradas nas infinitas navegações por sites e fóruns de resolução de problemas e outros que foram de provas de competições Matemáticas. Na seção seguinte **Caiu na Olimpíada!** exibimos uma imensa lista de problemas sobre o referido tema que foram extraídos de grandes competições tais como **OBMU, ICM, IMO, PUTNAM, MIT**, entre outros. A intenção é disponibilizar um material para estudo posterior sobre o assunto. Por fim, na seção final; **Poderia cair na Olimpíada?**, exibimos uma lista (mais curta), mas não menos importante, com questões que até onde sabemos, ainda não foram exploradas nas competições mais tradicionais, mas quem sabem em algum momento podem servir de inspiração de questões para provas olímpicas. Enfim, vamos começar essa viagem vivendo o presente, discutindo questões mais recentes de algumas das principais competições, deixando registrado o passado com as questões que apreceram em algumas das principais competições e convidamos o leitor a pensar no futuro com o nosso banco final de questões. Então vamos lá, apertem os cintos e boa viagem!

2 Matrizes e determinantes

Não é nossa intenção descrever detalhadamente a teoria sobre o tópico acima, admitimos conhecidas as definições básicas sobre matrizes e dos tipos especiais de matrizes, assim como os principais métodos e propriedades associadas a ideias de determinante de uma matriz (tudo isso por ser visto, por exemplo em [3]). Um fato importante é que no caso do estudo dos determinantes costuma-se em geral focalizar nas diversas regras práticas para calculá-lo e suas propriedades, deixando de lado a sua definição. Mas dependendo da questão a sua definição formal pode revelar o melhor caminho para a solução, como revela o exemplo a seguir:

Exemplo. 2.1 (Ècole Polytecnique-2004)**.** *Seja $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $|a_{ij}| \leq M$; dê uma cota superior para o valor de $|\det A|$ em função de n e M.*

Solução. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. O determinante de A é calculado por

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\ldots.a_{n\sigma(n)},$$

onde $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ é uma permutação e $sgn(\sigma) \in \{-1, 1\}$ é o sinal da permutação σ. Note que $\det(A)$ possui $n!$ parcelas. Assim,

$$\begin{aligned} |\det(A)| = &\ \left|\sum_{\sigma} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\ldots.a_{n\sigma(n)}\right| \\ \leq &\ \sum_{\sigma} \left|a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\ldots.a_{n\sigma(n)}\right| \\ = &\ \sum_{\sigma} \left|a_{1\sigma(1)}\right|.\left|a_{2\sigma(2)}\right|.\ldots.\left|a_{n\sigma(n)}\right| \\ \leq &\ n!M^n. \end{aligned}$$

■

Em algumas ocasiões um bom conhecimento das propriedades básicas dos determinantes e uma boa ideia podem forcener soluções inesperadamente rápidas, como revelam os exemplos a seguir.

Exemplo. 2.2. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Mostre que $\det(A) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4$.

Solução. Note que

$$A.A^t = \begin{pmatrix} a^2+\ldots+h^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a^2+\ldots+h^2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a^2+\ldots+h^2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\det(A.A^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^8 \Rightarrow$$
$$(\det(A))^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^8 \Rightarrow$$
$$\det(A) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4.$$

∎

Exemplo. 2.3. *Sejam $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ e I_n a matriz identidade de ordem n. Mostre que* $\det(I_n + A^2) \geq 0$.

Solução. Seja $\det[(I_n + i.A)] = w \in \mathbb{C}$. Ora, como as matrizes A e I_n comutam, segue que $I_n + A^2 = (I_n+i.A)(I_n-i.A)$, onde i é a unidade imaginária em $\mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \det(I_n+A^2) = \; & \det[(I_n+i.A)(I_n-i.A)] \\ = \; & \det(I_n+i.A)\det(I_n-i.A) \\ = \; & \det(I_n+i.A)\det(\overline{I_n-i.A}) \\ = \; & \det(I_n+i.A)\overline{\det(I_n-i.A)} \\ = \; & w\bar{w} = |w|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

∎

Há ocasiões em que além das propriedades padrão é necessário invocar outros conteúdos, como por exemplo nas questões a seguir, onde invocamos a noção de continuidade.

Exemplo. 2.4 (México)**.** *Sejam $A, B \in M(2019\times 2019,\mathbb{R})$. Mostre que existem $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $M = \alpha A + \beta B$ não é invertível.*

Solução. Se A não for invertível, basta tomar $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, pois nesse caso $M = 1.A = 0.B = A$, que não é invertível. De modo completamente análogo B não for invertível, basta tomar $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.
Para finalizar vamos analisar o caso em que A e B são invertíveis. Nesse caso, temos duas possibilidades, a saber:

I. Suponhamos que $\det(A)$ e $\det(B)$ têm sinais contrários.

Nesse caso, considere a seguinte função: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = \det[(1-x)A + xB]$. Note que f é contínua, $f(0) = \det(A)$ e $f(1) = \det(B)$. Ora, como estamos supondo que $\det(A)$ e $\det(B)$ têm sinais contrários, pelo Teorema do valor intermediário, segue que existe $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = 0$, ou seja, $\det[(1-a)A + aB] = 0$, o que revela que a matriz $(1-a)A + aB$ não é invertível. Nesse caso, basta tomar $\alpha = 1-a$ e $\beta = a$ para que tenhamos que a matriz $M = \alpha A + \beta B$ não seja invertível.

II. Suponhamos que $\det(A)$ e $\det(B)$ têm o mesmo sinal.

Nesse caso, considere a seguinte função: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = \det[(1-x)A - xB]$. Note que f é contínua, $f(0) = \det(A)$ e $f(1) = \det((-1).B) = (-1)^{2019}.\det(B) = -\det(B)$. Ora, como estamos supondo que $\det(A)$ e $\det(B)$ têm o mesmo sinal, segue que $f(0)$ e $f(1)$ têm sinais contrários. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $b \in [0,1]$ tal que $f(b) = 0$, ou seja, $\det[(1-b)A - bB] = 0$, o que revela que a matriz $(1-b)A + bB$ não é invertível. Nesse caso, basta tomar $\alpha = 1-b$ e $\beta = b$ para que tenhamos que a matriz $M = \alpha A + \beta B$ não seja invertível.

∎

Exemplo. 2.5. *Mostre que $GL_n(\mathbb{R})$ é um conjunto aberto e denso de $M(n\times n,\mathbb{R})$.*

Solução. Seja $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, a matriz $A - \frac{1}{k}I$ é invertível se, e somente se, $\frac{1}{k}$ não é um autovalor de A. Ora, como o número de autovalores de A é finito, segue que a matriz $A - \frac{1}{k}I$ é invertível para todo k suficientemente grande. Além disso,

$$\lim_{k\to\infty}\left(A - \frac{1}{k}I\right) = A,$$

o que revela que $GL_n(\mathbb{R})$ é denso em $M(n\times n,\mathbb{R})$.
Por fim, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, isto é, é a imagem inversa do aberto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pelo determinante, que é uma função contínua. Portanto $GL_n(\mathbb{R})$ é um aberto de $M(n\times n,\mathbb{R})$. ∎

Um conhecimento amplo de diversas ideias matematicas é importante, pois há conexões inesperadas, como por exemplo a questão a seguir que utiliza o princípio das gavetas de Dirichlet.

Exemplo. 2.6 (PUTNAM - 2004)**.** *Sejam $A, B \in M(2\times 2,\mathbb{Z})$ tais que $A, A+B, A+2B, A+3B$ e $A+4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas possuem entradas inteiras. Mostre que a matriz $A+5B$ também é invertível e possui uma inversa cujas entradas são todas inteiras.*

Solução. Inicialmente lembremos que se uma matriz A e a sua inversa têm entradas inteiras, então $\det(A) = \pm 1$. De fato, se todos os elementos de uma matriz são números inteiros, tem-se (pela definição) que o seu determinante é um número inteiro. Assim, se A e A^{-1} tém entradas inteiras, segue que seus determinantes são inteiros. Por outro lado, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, o que revela que só existem duas possibilidades, a saber: $\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$ ou $\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$. Definindo a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x) = \det(A+xB)$, segue que f é um polinômio de grau ≤ 2 em x. Além disso,

$$\begin{aligned} f(0) &= \det(A+0.B) = \det(A) \\ f(1) &= \det(A+1.B) = \det(A+B) \\ f(2) &= \det(A+2.B) = \det(A+2B) \\ f(3) &= \det(A+3.B) = \det(A+3B) \\ f(4) &= \det(A+4.B) = \det(A+4B) \end{aligned}$$

Ora, como por hipótese, as matrizes $A, A+B, A+2B, A+3B$ e $A+4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas possuem entradas inteiras, segue que os determinantes dessas matrizes são iguais a 1 ou a -1, isto é, $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4) \in \{-1, 1\}$. Como são 5 imagens pela f e todas elas pertencem ao conjunto $\{-1, 1\}$, segue pelo princípio das gavetas de Dirichlet, que entre as imagens $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ pelo menos três delas são iguais. Como f é um polinômio de grau ≤ 2, isso só é possível se f for constante. Assim temos que $f(x) = \det(A+xB) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = \det(A+xB) = -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em qual quer dos casos teremos que $f(5) = \det(A+5B) \neq 0$, o que revela que a matriz $A+5B$ é invertível. Além disso, como $f(5) = \det(A+5B) \in \{-1, 1\}$, concluímos que as entradas da inversa da matriz $A+5B$ também são inteiras. ■

Exemplo. 2.7. *Sejam p um inteiro positivo e* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calcule A^p.*

Solução. Podemos escrever a seguinte decomposição $A = I + T$, onde $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculando as potências de T, podemos perceber que $T^k = 0$ para $k \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} A^p = &\ (I+T)^p \\ = &\ I + pT + \binom{n}{2}T^2 + \binom{n}{3}T^3 \\ = &\ \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} & \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \\ 0 & 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$

3 Espaços vetoriais e transformações lineares

Em dimensão finita, o estudo das transformações lineares reduz-se ao estudo das matrizes que as representam, quando fixamos bases dos espaços vetoriais que são o domínio e o contradomínio da transformação linear. O exemplo a seguir explora essa relação.

Exemplo. 3.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$ e um operador linear $T : V \to V$ tal que $T^5 = Id$. Sabendo-se que se $v \in V$ é tal que $Tv = v$ implica que $v = 0$. Mostre que $dimV$ é divisível por 4.*

Solução. Ora, como $Tv = v$ implica $v = 0$, segue que 1 não é um autovalor de T. Assim, se A é a matriz do operador T em relação à base canônica, então $T^5 = Id$ implica que $A^5 - I = 0$, onde I é a matriz identidade. Assim o polinômio $P(X) = X^5 - 1$ anula-se em A. Por outro lado, como 1 não é auto valor de A, e

$$P(X) = X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1),$$

segue que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I = 0$. Por outro lado o polinômio $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, segue que esse é o polimômio minimal de A. Como o polinômio característico de A possui grau igual a $dimV$, e os mesmos fatores do polinômio minial de A, segue que $4 \mid dimV$. ■

Exemplo. 3.2 (OBM-2019). *Seja $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{p-1}\}$ o corpo dos inteiros módulo p (com p primo). Seja V um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial de dimensão 3. Quantos subespaços de dimensão 2 há em V?*

Solução. Nesse caso há um teorema que resolve o problema:

Teorema. 1. *Seja V umm espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo finito $\mathbb{F}_p$, com p elementos. Então o número de subespaços de V com dimensão k é dado por* $\frac{(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{k-1})}{(p^k-1)(p^k-p)\dots(p^n-p^{k-1})}$

No caso da questão, $n = 3$ e $k = 2$. Portanto o número de subespaços é

$$\frac{(p^3-1)(p^3-p)}{(p^2-1)(p^2-p)} = \frac{(p-1)(p^2+p+1)p(p^2-1)}{(p^2-1)p(p-1)} = p^2 + p + 1.$$

■

3.1 Diagonalização de operadores lineares

Um dos tópicos mais explorados nas questões olímpicas envolvendo matrizes são os autovalores, autovetores e diagonalização de operadores lineares. Neste ponto faremos uma breve incurssão nessa direção. Para isso, sugerimos que o leitor revise, por exemplo em [3] ou [1] os seguintes conceitos: **Autovalores e auto vetores, polimômio característico, polinômio minimal, matrizes semelhantes e matrizes diagonalizáveis (incluindo o famoso teorema espectral, segundo o qual toda matriz simétrica real é diagonalizável)**. Vamos aos exemplos:

Exemplo. 3.3. *O Teorema de Cayley-Hamilton, afirma que toda matriz $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ anula o seu polinômio característico, isto é, se $p_A(x) = \det(xI - A)$, então $p_A(A) = 0$. Um aluno ofereceu o seguinte argumento para demonstrar o Teorema de Cayley-Hamilton:*

$$p_A(x) = det(xI - A) \Longrightarrow$$

$$p_A(A) = det(AI - A) = det(A - A) = det(0) = 0.$$

isso demonstra o teorema de Cayley-Hamilton? Justifique!

Exemplo. 3.4. *Se* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, *Calcule A^{2020} e A^{-2021}.*

Solução. O polinômio característico de A é definido por

$$p_A(x) = \det(xI - A) = x(x-1)(x-2).$$

Ora, como os autovalores de A são as raízes do seu polinômio característico, seque que os autovalores de A são $0, 1$ e 2, e os correspondentes auto-espaços são gerados pelos vetores

$v_1 = (-4, 3, 2), v_2 = (-4, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$, respectivamente. Seja P a matriz que tem por colunas os autovetores de A, ou seja,

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} A^k = & \ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix} \\ = & \ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 + 3.3^{k+1} & 16 - 2^{k+3} & -40 + 3.2^{k+3} \\ 3.2^k & -2^{k+2} & 3.2^{k+2} \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora se $k = 2020$, tem-se que

$$A^{2020} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 + 3.3^{2021} & 16 - 2^{2023} & -40 + 3.2^{2023} \\ 3.2^{2020} & -2^{2022} & 3.2^{2022} \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Por fim, como $\lambda = 0$ é um dos autovalores de A, segue que A não é invertível. Assim, A^{-2021} que seria $(A^{-1})^{2021}$ não existe, visto que A^{-1} não existe. ■

Exemplo. 3.5. *Sejam A e B matrizes reais 2×2 cujo determinante é igual a 1. Prove que*

$$tr(AB) - tr(A)tr(B) + tr(AB^{-1}) = 0.$$

Solução. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$B^2 - tr(B).B + I = 0.$$

Multiplicando a expressão acima por AB^{-1}, segue que

$$AB - tr(B).A + AB^{-1} = 0$$

Tomando o traço, segue que

$$tr(AB) - tr(A)tr(B) + tr(AB^{-1}) = 0.$$

■

Exemplo. 3.6. *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Mostre que $A^3 - A^2 - 8A - 18T = 0$.

(b) Calcule A^{-1}.

Solução.

(a) O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(x) = & \ \det(xI - A) \\ = & \ x^3 - x^2 - 8A - 18. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Caley-Hmilton, segue que

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^3 - A^2 - 8A - 18I = 0.$$

(b) Pelo item anterior, $A^3 - A^2 - 8A - 18I = 0$. Portanto,

$$A(A^2 - A - 8I) = 18I \Leftrightarrow$$

$$A.\left[\frac{1}{18}(A^2 - A - 8I)\right] = \left[\frac{1}{18}(A^2 - A - 8I)\right].A = I$$

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{18}(A^2 - A - 8I) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 11 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

■

Exemplo. 3.7. *(FRANÇA) Sejam n um inteiro positivo, $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tais que $tr(AB) \neq 0$. Considere o operador linear*

$$\begin{aligned} & f : M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R}) \\ & M \mapsto f(M) = tr(AM).B \end{aligned}$$

Mostre que f é diagonalizável.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} (f \circ f)(M) = & \ tr(Af(M))B = tr(A(tr(AM)B) \\ = & \ tr(AM)tr(AB)B = tr(AB)(tr(AM)B) \\ = & \ tr(AB)f(M) \end{aligned}$$

portanto, $f \circ f = tr(AB)f$, o que revela que o polinômio minimal de f divide o polinômio $p(X) = X^2 - tr(AB)X$. Ora, como P possui raízes (simples) 0 e $tr(AB) \neq 0$, segue que as raízes do polinômio minimal de f são simples, o que implica que f é diagonalizável. ■

4 Caiu na olimpíada!

Agora apresentamos uma longa lista de problemas que foram extaídos de algumas das mais importantes competições matemáticas a nível universitário.

1. (PUTNAM-1967) Defina S_0 como sendo igual a 1. Para $n \geq 1$, seja S_n a quantidade de matrizes $n \times n$ cujos elementos são inteiros não negativos com a propriedade de que $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$. Prove que:

   (a) $s_{n+1} = S_n + nS_{n-1}$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} = exp(x + \frac{x^2}{2})$, onde $exp(x) = e^x$.

2. (PUTNAM-1968) Sejam p um número primo e J o conjunto das matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cujas entradas pertencem ao conjunto $1, 2, \cdots, p-1$ e que satisfazem as condições $a+d \equiv 1(mod\ p)$ e $ad - bc \equiv 0(mod\ p)$. Qual o número de elementos do conjunto J?

3. (PUTNAM-1969) Sejam A e B matrizes com entradas reais de ordens 3×2 e 2×3, respectivamente. Suponha que o produto AB é dado por:

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mostre que o produto BA é dado por $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

4. (PUTNAM-1985) Seja $G = \{M_1, M_2, \cdots, M_r\}$ um grupo finito de matrizes reais $n\times n$, onde a operação do grupo é a multiplicação usual de matrizes. Supondo que $\sum_{i=1}^{r} tr(M_i) = 0$, mostre que $\sum_{i=1}^{r} M_i = 0$.

5. (PUTNAM-1986) Uma **transversal** de uma matriz A de ordem n, consiste de n entradas de A tais que não hajam duas entradas de uma mesma linha nem de uma mesma coluna de A. Seja $f(n)$ a quantidade de matrizes A, de ordem n, satisfazendo as seguintes condições:

   a)Cada entrada α_{ij} de A pertence ao conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

   b)A soma das n entradas de uma transversal de A é sempre a mesma para todas as transversais de A.

   Um exemplo de uma matriz A, de ordem 3, que cumpre essas condições é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determine, exibindo uma prova, uma fórmula para $f(n)$ da forma

$$f(n) = a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + a_3 b_3^n + a_4$$

   onde os a_i's e b_i's são números racionais.

6. (PUTNAM-1986) Sejam A, B, C, D matrizes $n\times n$ tais que AB^t e CD^t são simétricas e $AD^t - BC^t = I$. Mostre que $A^tD - C^tB = I$

7. (PUTNAM-1988) Se um operador linear A num espaço vetorial n-dimensional tem $n+1$ autovetores tais que quaisquer n deles são linearmente independentes, podemos aformar que A é um múltiplo escalar da identidade? Justifique a sua resposta.

8. (PUTNAM-1990) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem tais que $ABAB = 0$, podemos afirmar que $BABA = 0$?

9. (PUTNAM-1990) Seja S um conjunto de matrizes 2×2 tais que as suas entradas sejam números inteiros a_{ij} tais que $a_{ij} \leq 200$. Mostre que se S possui mais que $50387 (= 15^4 - 15^2 - 15 + 2)$ elementos, então S possui dois elementos que comutam.

10. (PUTNAM-1991)Sejam A e B matrizes diferentes de ordem n, com entradas reais. Se $A^3 = B^3$ e $A^2B = B^2A$, podemos afirmar que a matriz $A^2 + B^2$ é invertível?

11. (PUTNAM-1992)Seja $\mathcal{M}$ um conjunto de matrizes reais $n\times n$ tais que:

    (i) $I \in \mathcal{M}$, onde I é a matriz identidade $n\times n$;

    (ii) Se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{M}$, então $AB \in \mathcal{M}$ ou $-AB \in \mathcal{M}$, mas não ambos;

    (iii) Se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{M}$, então $AB = BA$ ou $AB = -BA$;

    (iv) Se $A \in \mathcal{M}$ e $A \neq I$, existe pelo menos uma matriz $B \in \mathcal{M}$ tal que $AB = -BA$.

    Prove que $\mathcal{M}$ possui no máximo n^2 matrizes.

12. (PUTNAM-1992) Seja D_n o valor do determinante $(n-1)\times(n-1)$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

    O conjunto $\left\{\frac{D_n}{n!}\right\}_{n\geq 2}$ é limitado?

13. (PUTNAM-1994)Para $n \geq 1$, seja d_n o máximo divisor comum das entradas da matriz $A^n - I$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    Mostre que $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$.

14. (BERKELEY-1991)Seja A uma transformação linear num n-espaço vetorial complexo tal que $\det(xI - A) = (x-1)^n$. Prove que A é semelhante a A^{-1}.

15. (ICM-1994)

    (a) Seja A uma matriz $n\times n$, $n \geq 2$, simétrica, invertível cujos elementos são números reais positivos. Mostre que $z_n \leq n^2 - 2n$, onde z_n é o número de elementos nulos em A^{-1}.

    (b) Quantos elementos iguais a zero estão presentes na inversa da matriz $n\times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

16. (ICM-1994) Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$ e suponha que F e G são aplicações lineares (operadores) de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.

    (a) Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F$.

    (b) Mostre que existe $k \geq 1$ tal que $F^k = 0$.

17. (ICM-1994) Seja A uma matriz $n \times n$ cujo polinômio característico é
$$p(x) = (x - c_1)^{d_1}(x - c_2)^{d_2} \cdots (x - c_k)^{d_k},$$
onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são distintos (isso significa que c_1 aparece d_1 vezes na diagonal, c_2 aparece d_2 vezes na diagonal, etc. e $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$). Seja V o espaço vetorial de todas as matrizes B de ordem n tais que $AB = BA$. Mostre que
$$dimV = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2.$$

18. (ICM-1994) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vetores do espaço Euclideano m-dimensional, tais que $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Mostre que existe uma permutação π dos inteiros $1, 2, \ldots, k$ tal que
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i} \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} ||x_i||^2 \right)^{1/2}, \text{ para } \ n = 1, 2, \ldots, k.$$
Nesse caso $|| \cdot ||$ representa a norma Euclideana.

19. (BERKELEY-1994) Prove ou dê um conra-exemplo: Uma matriz real quadrada A é semelhante a sua transposta A^t.

20. (ICM-1995)Seja X uma matriz com colunas $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Seja Y uma matriz uma matriz com colunas $X_2, X_3, \ldots, X_n, 0$. Mostre que as matrizes $A = YX^{-1}$ e $B = X^{-1}Y$ têm posto $n-1$ e todos os autovalores nulos.

21. (ICM-1995) Sejam A e B matrizes reais $n \times n$. Assuma que existem $n+1$ números reais diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ tais que as matrizes
$$C_i = A + t_i B, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$
são nilpotentes (i.e. $C_i^n = 0$). Mostre que A e B são nilpotentes.

22. (ICM-1995) Seja A uma matriz real 3×3 tal que os vetores Au e u são ortogonais para cada vetor coluna $u \in \mathbb{R}^3$. Porve que:

    (a) $A^t = -A$, onde A^t denota a transposta da matriz A.

    (b) Existe um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $Au = v \times u$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$, onde $v \times u$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

23. (ICM-1996) Para $j = 0, \ldots, n$, seja $a_j = a_0 + jd$, onde a_0 e d são números reais fixos. Sendo
$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}.$$
Calcule $\det(A)$, onde $\det(A)$ denota o determinante da matriz A.

24. (ICM-1996)O operador linear A num espaço vetorial V é chamado de *Involução* se $A^2 = E$, onde E é o operador identidade em V. Suponha que $\dim V < \infty$.

    (a) Prove que para toda involução A em V existe uma base de V consistindo de autovetores de A.

    (b) Determine o número máximo de pares de involuções em V que comutam.

25. (ICM-1996) Seja G o subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$, gerado por A e B onde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Seja H o conjunto de todas as matrizes de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de G tais que $a_{11} = a_{22} = 1$.

    (a) Mostre que H é um subgrupo abeliano de G.

    (b) Mostre que H não é finitamente gerado.

26. (PUTNAM-1996) Dada uma matriz A de ordem n, definimos $\sin A$ pela série de potências
$$senA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$
Prove ou dê um contra-exemplo: Existe uma matriz real A tal que $senA = \begin{pmatrix} 1 & 1996 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. (ICM-1997)Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $A^2 + B^2 + AB$. Prove que se $BA - AB$ é invertível, então n é divisível por 3.

28. (IMC-1997) Seja M uma matriz invertível $2n \times 2n$ cuja representação por blocos é
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ e \ M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$
Mostre que $\det(M). \det(H) = \det(A)$.

29. (IMC-1997)

    (a) Seja $f : M_n \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear do espaço $M_n = \mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes reais $n \times n$ e entradas reais, i.e.,
$$f(A + B) = f(A) + f(B), \quad f(cA) = cf(A),$$
para quaisquer $A, B \in M_n, c \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma matriz $C \in M_n$ tal que $f(A) = tr(AC)$ para qulaquer $A \in M_n$. (Se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, então $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$).

(b) Alé, das condições do intem anterior, supondo que $f(AB) = f(BA)$ para quaisquer $A, B \in M_n$. Prove que $f(A) = \lambda.tr(A)$.

30. (IMC-1998)Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 10 e $U_1, U_2 \subset V$ dois subespaços vetorias tais que $U_1 U_2$, $\dim_{\mathbb{R}} U_1 = 3$ e $\dim_{\mathbb{R}} U_2 = 6$. Seja E o conjunto de todas as aplicações lineares $T : V \to V$ que tem U_1 e U_2 como espaços T-invariantes (i.e. $T(U_1) \subseteq U_1$ e $T(U_2) \subset U_2$). Calcule a dimensão de E como um epsço vetorial real.

31. (IMC-1998) Seja V um espaço vetorial real, e $f_1, f_2, \ldots, f_k$ aplicações lineares de V em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(x) = 0$ quando $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x) = 0$. Prove que f é uma combinação linear de $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

32. (IMC-1999)

(a) Mostre que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ existe uma matriz A de ordem $m \times m$, tal qua $A^3 = A + I$, onde I é a matriz identidade $m \times m$.

(b) Mostre que $\det(A) > 0$ para toda matriz A de ordem $m \times m$ satisfazendo $A^3 = A + I$

33. (PUTNAM-1988)Sejam n um inteiro positivo e M_n uma matriz anti-simétrica de ordem $2n + 1$ tal que as entradas das primeiras n subdiagonais inferiores são iguais a 1 e cada entradas das demais subdiagonais inferiores são iguais a -1, como ilustram os dois exemplos, a seguir:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine, exibindo uma prova, o posto de M_n.

34. (IMC-2000) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem tais que $posto(AB - BA) = 1$. Mostre que $(AB - BA)^2 = 0$.

35. (IMC-2000) Para uma matriz A de ordem $m \times m$, define-se e^A como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ (A soma é convergente para qualquer matriz A). Prove ou dê um contra-exemplo, que para todo polinômio p de coeficientes reais e matrizes reais A e B de ordem $m \times m$, $p(e^{AB})$ é nilpotente se, e somente se, $p(e^{BA})$ é nilpotente. (Uma matriz A é nilpotente se $A^k = 0$, para algum inteiro positivo k).

36. (IMC-2001)Seja n um inteiro positivo. Considere uma matriz $n \times n$ com entradas $1, 2, \ldots, n^2$ escritos em ordem crescente iniciando do canto superior esquerdo, escrevendo cada inha a partir da esquerda para a direita. Escolhemos n entradas dessa matriz de modo que cada uma delas, de modo que cada uma delas partence a exatamente uma linha e uma coluna. Quais são os possíveis valores da soma das entradas selecionadas?

37. (IMC-2001) Seja A uma matriz complexa $n \times n$ tal que $A^6 \neq \lambda I$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Prove que A é semelhante a uma matriz que possui no máximo um elemento não nulo na disgonal principal.

38. (OBM-2001) Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz real simétrica tal que $a_{ii} = 1$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$, para todo i. Mostre que $0 \leq \det A \leq 1$.

39. (OBM-2002)Seja A a matriz real $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x+y & x & \ldots & x \\ x & x+y & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \ldots & x+y \end{pmatrix}$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é inversível e calcule A^{-1}.

40. (OBMU-2001)Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{1,j} = a_{i,1} = 1$ (para quaisquer i e j, $1 \leq i, j \leq n$) e $a_{i+1,j+1} = a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ (para quaisquer i e j, $1 \leq i, j \leq n$). Assim,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \ldots \\ 1 & 7 & 25 & 63 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$.

41. (OBMU-2001)Definimos $SL(2, Z)$ como o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante 1. Seja $A \in SL(2, Z)$ uma matriz tal que existe $n > 0$ inteiro com $A^n = I$. Prove que existe $X \in SL(2, \mathbb{Z})$ tal que $X^1 AX$ é igual a uma das matrizes:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

42. (OBMU-2002) $A = (a_{ij})$ uma matriz real simétrica $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$ paratodo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Prove que $0 < \det A \leq 1$.

43. (PUTNAM-2002)Em "determinante Tic-Tac-Joe", um jogador 1 inicia o jogo entrando com um 1 numa posição qualquer de uma matriz 3×3 que está inicialmente vazia, em seguida um jogador 0 entra com um 0 numa outra posição que ainda permaneça vazia e assim o jogo continua até que todas as posições da matriz 3×3 sejam preenchidas com 0's e 1's. O jogador 0 é considerado o vencedor se

o determinante da matriz é igual a 0, caso contrário, o jogador 1 é considerado o vencedor. Assumindo que os dois jogadores utilizam uma estratégia ótima quem sempre pode ser o vencedor? Como isso pode ocorrer?

44. (PUTNAM-2002) Seja p um número primo. Prove que o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix}$ é congruente módulo p a um produto de polinômios da forma $ax + by + cz$, onde a, b e c são inteiros. (dizemos que dois polinômios são congruentes módulo p se os coeficientes correspondentes são congruentes módulo p).

45. (IMC-2002) Para uma matriz M de ordem $n \times n$ com entradas reais seja $||M|| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{||Mx||_2}{||x||_2}$, onde $||\cdot||_2$ denota a norma Euclideana do $\mathbb{R}^n$. Assume que uma matriz A de ordem $n \times n$ e entradas reais satisfaz $||A^k - A -^{k-1}|| \leq \frac{1}{2002k}$ para todo inteiro positivo k. Prove que $||A^k|| \leq 2002$, para todo inteiro positivo k.

46. (ICM-2002) Calcule o valor do determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se } i \neq j \\ 2, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

47. (ICM-2002) Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ com entradas complexas e suponha que $n > 1$. Prove que:

$$A\bar{A} = I \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tal que } A = S\bar{S}^{-1}.$$

(Se $A = [a_{ij}]$ então $\bar{A} = [\overline{a_{ij}}]$, onde $\overline{a_{ij}}$ é o conjugado de a_{ij}; $GL_n(\mathbb{C})$ denota o conjunto das matrizes complexas $n \times n$ e I_n a matriz identidade).

48. (OBMU-2003) Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ inversíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para três valores inteiros consecutivos de k então $AB = BA$.

49. (ICM-2003)Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $3A^3 = A^2 + A + I$ (I é a matriz identidade). Mostre que a sequência A^k converge para uma matriz idempotente. (Uma matriz B é dita idempotente quando $B^2 = B$).

50. (ICM-2003)Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que $AB + A + B = 0$. Mostre que $AB = BA$.

51. (OBMU-2003)Seja $p > 2$ um número primo. Seja X_p o conjunto de todas as matrizes quadradas A com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ e de ordem 4 para as quais $A^2 = I$: $X_p = \{A \in M(\mathbb{Z}/(p), 4 \times 4) | A^2 = I\}$. Calcule o número de elementos de X_p. Observação: $\mathbb{Z}/(p) = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ é o corpo finito com p elementos. A soma e o produto são definidos módulo p; assim, por exemplo, em $\mathbb{Z}(7), 4 + 5 = 2$ e $4 \cdot 5 = 6$.

52. (OBMU-2003) Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$, para quaisquer i, j, e $|\{(i,j) | a_{ij} = 1\}| \geq \frac{99}{100} \cdot n^2$. Prove que $tr(A^k) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k$, para todo $k \geq 2$.

Observação: Se $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, é uma matriz quadrada então $tr(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}$ denota o traço de B.

53. (COM-2004) Sejam A e B matrizes $n \times n$ com entradas reais tais que para qualquer matriz X de ordem n tem-se $\det(A + X) = \det(B + X)$, mostre que $A = B$.

54. (OBMU-2004) Considere a matriz complexa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule A^{2004}.

55. (OBMU-2004)Considere a matriz A $n \times n$ definida por $a_{ij} = n(i-1) + j$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. As interseções de k linhas e k colunas quaisquer de A determinam uma submatriz de ordem k de A. Seja $\varphi(n)$ a soma dos determinantes de todas as submatrizes de A.
    (a) Determine λ real de forma que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^\lambda}$ exista e seja não nulo.
    (b) Determine o valor do limite acima para o valor de λ encontrado.

56. (VIETNÃ-2003) Seja A uma matriz quadrada tal que $A^{2003} = 0$. Mostre que para todo inteiro positivo $n \geq 1$, tem-se que:

$$posto(A) = posto(A + A^2 + \cdots + A^n)$$

57. (ICM-2004)Seja A uma matriz real de ordem 4×2 e B uma matriz real de ordem 2×4 tais que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine BA.

58. (ICM-2004) Para $n \geq 0$ defina as matirzes A_n e B_n da seguinte forma: $A_0 = B_0 = (1)$ e para todo $n > 0$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} \text{ e } B_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Denote a soma de todos os elementos da matriz M por $S(M)$. Prove que $S(A_n^{k-1}) = S(A_k^{n-1})$ para todo $n, k \geq 1$.

59. (PUTNAM-2004) Defina a sequência $(u_n)_{n \geq 0}$ por $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, e que além disso, $\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!$, para todo $n \geq 0$. Mostre que u_n é um inteiro para todo n. (por convenção, $0! = 1$).

60. (OBMU-2005) Sejam A e B matrizes reais quadradas de mesma dimensão tais que, para todo inteiro positivo k, $(A + B)^k = A^k + B^k$. Prove que se A é invertível então B é a matriz nula.

61. (OBMU-2005) Determine todos os valores reais de α para os quais a matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ definida por $a_{ij} = \cos((i-1)\cdot j\alpha)$, para $1 \le i, j \le n$, tem determinante nulo.

62. (OBMU-2005) Determine, em função de n, o número de possíveis valores para o determinante de A, dado que A é uma matriz real $n\times n$ tal que $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$, onde I representa a matriz identidade $n \times n$, e 0 representa a matriz nula $n \times n$.

63. (OBMU-2015) Sejam $v_1, v_2, , v_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $|v_i| \le 1$ para $1 \le i \le n$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Prove que existe uma permutação σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{k} v_{\sigma(j)}\right| \le \sqrt{5}$ para qualquer k com $1 \le k \le n$.
Obs. Se $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ denota a norma euclideana de v.

64. (OBMU-2015)Prove que para quaisquer naturais $0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k$ e $0 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k$, a matriz $A = (a_{rs})_{1\le r,s\le k}$ dada por $a_{rs} = \binom{i_r+j_s}{i_r} = \frac{(i_r+j_s)!}{i_r!j_s!}, (1 \le r, s \le k)$ é invertível.

65. (ICM-2005) Seja A uma matriz real $n\times n$ cujo (i, j)-ésimo elemento é igual a $i + j$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Qual é o posto de A?

66. (ICM-2005)No espaço linear das matrizes reais $n \times n$, determine a maior dimensão possível do subespaço linear V tal que
$$\forall X, Y \in V \Rightarrow tr(XY) = 0.$$
(o traço de uma matriz é a soma dos elementos da dua diagonal principal).

67. (ICM-2005) Prove que se p e q são números racionais e $r = p + q\sqrt{7}$, então existe uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ne \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, com entradas inteiras e $ad - bc = 1$ tais que
$$\frac{ar + b}{cr + d} = r.$$

68. (ROMÊNIA) Seja A uma matriz complexa de ordem $n \ge 2$ e posto r.
   (a) Mostre que existem matrizes B e C de ordem n e posto r tais que $A = BC$.
   (b) Mostre que a matriz A se anula para um polinômio de grau $r + 1$ com coeficientes complexos.

69. (OBMU-2006)Prove que, para todo inteiro $n \ge 2$, o número de matrizes quadradas 2×2 com entradas inteiras e pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ que têm determinante da forma $kn + 1$ para algum k inteiro é dado por $n^3 \cdot \displaystyle\prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$.

70. (OBM-2006)Considere as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Prove que, para $n > 1$, não existem inteiros $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n$ com $a_2, a_3, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ não nulos tais que
$$A^{a_1} \cdot B^{b_1} \cdot A^{a_2} \cdot B^{b_2} \cdot \dots \cdot A^{a_n} \cdot B^{b_n} = I,$$
onde I é a matriz identidade de ordem 2.

71. (ICM-2006) Seja A uma matriz $n\times n$ com entradas inteiras e $b_1, \dots, b_k$ inteiros satisfazendo $\det A = b_1 \cdot \dots \cdot b_k$. Prove que existem matrizes com entradas inteiras $B_1, \dots, B_k$ de ordem $n \times n$ tais que $A = B_1 \cdot \dots \cdot B_k$ e $\det B_i = b_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

72. (ICM-2006) Seja v_0 o vetor nulo do $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tais que a norma euclideana $|v_i - v_j|$ é racional para todo $0 \le i, j \le n + 1$. Prove que $v_1, \dots, v_{n+1}$ são linearmente independentes sobre os racionais.

73. (ICM-2006) Sejam A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ matrizes reais invertíveis 2×2 tais que
   (1) as matrizes A_i não possuem um autovalor real em comum;
   (2) $A_i = S_i^{-1} B_i S_i$ para todo $i = 1, 2, 3$;
   (3) $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mostre que existe uma matriz S, invertível, 2×2, tal que $A_i = S_i^{-1} B_i S_i$, para todo $i = 1, 2, 3$.

74. (OBMU-2007) Calcule os autovalores da matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ abaixo:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ 1 & 0 & n-1 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & n & 0 \end{pmatrix}$$
Em outras palavras, $M_{i,i+1} = n+1-i$, $M_{i+1,i} = i$, $M_{ij} = 0$ se $|i - j| \ne 1$.
Obs: Os autovalores de M são as raízes da seguinte equação em x: $\det(M - xI) = 0$.

75. (OBMU-2007) Seja A uma matriz real quadrada simétrica de ordem n, e $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$ seus autovalores (contados com multiplicidade). Determine, em função de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:
   (a) O número de matrizes reais B simétricas de ordem n tais que $B^2 = A$.
   (b) O número de matrizes reais B de ordem n tais que $B^2 = A$.

76. (ICM-2007) Seja $n \ge 2$ um inteiro. Quais são o mínimo e o máximo valor possível do posto de uma matriz $n \times n$ cujas n^2 entradas são precisamente os inteiros $1, 2, 3, \dots, n^2$.?

77. (ICM-2007) Dizemos que um polinômio $P(x_1, \ldots, x_k)$ é *bom* se existem matrizes reais $A_1, \ldots, A_k$ de ordem 2×2 tais que

$$P(x_1, \ldots, x_k) = \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right).$$

Determine todos os valores de k para os quais todos os polinômios homogêneos em k variáveis de grau 2 são bons. (Um polinômio é dito homogêneo se cada termo tem o mesmo grau total).

78. (ICM-2007) Seja $n > 1$ um inteiro ímpar e $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ uma matriz $n \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se} i - j = - \pm 2(mod \quad n) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine $\det A$.

79. (ICM-2007) Para cada inteiro postivo k, determine o menor número n_k para o qual existem matrizes reais $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de ordem $n_k \times n_k$ que cumprem as seguintes condições:

(1) $A_1^2 = A_2^2 = \ldots = A_k^2 = 0$,

(2) $A_i A_j = A_j A_i$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$, e

(3) $A_1 A_2 \ldots A_k \neq 0$.

80. (OBMU-2008) Suponha que existem duas matrizes inversíveis $n \times n$, A e B, diferentes da matriz identidade I e satisfazendo as relações

$$\begin{cases} A^7 = I \\ ABA^{-1} = B^2 \end{cases}$$

Mostre que existe um inteiro $k > 0$ tal que $B^k = I$ e determine o menor k com essa propriedade.

81. (OBM-2008)Prove que não existe uma matriz 7×7, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 7}$, com $a_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq 7$ cujos autovalores (contados com multiplicidade) são: $6, -5, -5, 1, 1, 1, 1$.

82. (ICM-2008) Para cada permutação $\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_n)$ defina $D(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |i_k - k|$. Seja $Q(n, d)$ o número de permutações σ de $(1, 2, \cdots, n)$, com $d = D(\sigma)$, Prove que $Q(n, d)$ é par para $d \geq 2n$.

83. (ICM-2008) Seja n um inteiro positivo e considere a matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j \text{ é um número primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que $|\det A| = k^2$ para algum inteiro k.

84. (OBMU-2009) Dados os nu´meros reais a, b, c, d, considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$

Se $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, prove que

$$\det(A) = f(1)f(i)f(-1)f(-i).$$

(Aqui i representa a unidade imaginária.)

85. (PUTNAM-2009) Seja d_n o determinante de uma matriz $n \times n$ cujas entradas, da esquerda para a direita e de cima para baixo, são os números $cos1, cos2, \cdots, cosn^2$, por exemplo,

$$d_3 = \begin{vmatrix} cos1 & cos2 & cos3 \\ cos4 & cos5 & cos6 \\ cos7 & cos8 & cos9 \end{vmatrix}$$

Os argumentos dos cossenos estão sempre em radianos, não em graus. Determine $\lim_{n \to \infty} d_n$.

86. (ICM-2009) Sejam A, B e C matrizes quadradas do mesmo tipo, e suponha que A é invertível. Prove que se $(A - B)C = BA^{-1}$, então $C(A - B) = A^{-1}B$.

87. (ICM-2009) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ duas matrizes $n \times n$ tais que

$$A^2B + BA^2 = 2ABA.$$

Prove que existe um inteiro positivo k tal que

$$(AB - BA)^k = 0.$$

88. (OBMU-2010) Cada um dos itens a seguir apresenta um valor diferente para a matriz B. Para cada um desses valores, determine quantas matrizes reais A existem tais que $A^3 - 3A = B$.

(a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

89. (OBMU-2010) Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos e $n = n_1.n_2$. Considere a matriz real simétrica $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, tal que para todo i,

$a_{i,i} = 4$
$a_{i,i+1} = a_{i+1.i} = -1$, para $1 \leq i \leq n - 1$ tal que $(i + 1)$ não é multiplo de n_1
$a_{i,1+n_1} = a_{i+n_1,i} = -1$,

e as demais entradas $a_{i,j}$ são iguais a 0. Prove que A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são positivas.

90. (ICM-2010) Suponha que a, b e c são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$ tais que

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Prove que:

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + c^{2n} + c^{2n}$$

para todo inteiro positivo n.

91. (ICM-2010) Seja A uma matriz simétrica de ordem $m \times m$ sobre o um corpo de dois elementos cujas entradas da diagonal são nulas. Prove que para todo inteiro positivo n cada coluna da matriz A^n tem uma entrada nula.

92. (OBMU-2011) Seja X uma matriz real quadrada $n \times n$. Suponha que existe um inteiro positivo m com $(X^2 + I)^m = 0$.

    (a) Mostre que $n \neq 2011$.

    (b) Se $n = 2010$, é possível concluir que $X^2 + I = 0$?

93. (MIT-2011)Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

94. (MIT-2011)Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & y & y & y & y \\ y & x & y & y & y \\ y & y & x & y & y \\ y & y & y & x & y \\ y & y & y & y & x \end{pmatrix}.$$

95. (ICM-2011) Existe uma matriz real A de ordem 3×3 tal que $tr(A) = 0$ e $A^2 + a^t = I$. ($tr(A)$ denota o traço de A, A^t a transposta de A e I a matriz identidade).

96. (ICM-2011) Seja n um inteiro positivo e V um espaço vetorial cuja dimensão sobre um corpo de 2 elementos é igual a $2n - 1$. Prove que para vetores arbitrários $v_1, v_2, \ldots, v_{4n-1} \in V$, existe uma sequência $1 \leq i_1 \leq \ldots i_{2n} \leq 4n - 1$ de índices tais que $v_{i_1} + \ldots + v_{i_{2n}} = 0$.

97. (OBMU-2012) Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para cada uma das matrizes $M_i (i = 1, 2, 3)$, determine quantas matrizes A_i existem com $A_i^5 = M_i$.

98. (OBMU-2012)Considere todas as matrizes quadradas de ordem $4n$ que têm $4n$ entradas iguais a 1 e $4n$ entradas iguais a -1 e as demais entradas iguais a 0. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?

99. (ICM-2012) Seja n um inteiro positivo. Determine o menor valor velor do posto de uma matriz $n \times n$ que possui todos os elementos iguais a 0 na diagonal principal e números reais positvos fora da diagonal principal.

100. (OBMU-2013) Seja $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo de raio 1 e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\tfrac{5x+3y}{4}, \tfrac{3x+5y}{4}\right) \end{aligned}$$

Encontre todos os valores de n natural para os quais $T^n(C)$, a imagem de C após n aplicações de T, contenha pelo menos 2013 pontos $(a; b)$ com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

101. (ICM-2013) Sejam A e B matrizes reais simétricas cujos autovalores são todos maiores que 1. Seja λ um autovalor real da matriz AB. Mostre que $|\lambda| > 1$.

102. (ICM-2013) Suponha que $v_1, \ldots, v_d$ são vetores unitários em $\mathbb{R}^d$. Mostre que existe um vetor unitário u tal que

$$|u \cdot v_i| \leq \frac{1}{\sqrt{d}}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots d.$$

(Aqui $\cdot$ representa o produto escalar usual do $\mathbb{R}^d$).

103. (OBMU-2014) Considere as matrizes 3×3 cujas entradas são inteiros entre 0 e 9 (inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.

104. (OBMU-2014) Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n$ reais positivos tais que $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 2\pi$ e O um ponto fixo do plano. Considere a família de polígonos convexos de n lados contendo O em seu interior cujos ângulos externos sejam respectivamente $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Sejam y_i o comprimento do i-ésimo lado, e x_i a distância de O ao i-ésimo lado.

    (a) Mostre que o vetor $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ depende linearmente do vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, isto é, existe uma matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ que só depende dos t_i, $1 \leq i \leq n$ tal que $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, para $1 \leq i \leq n$.

    (b) Considere um segundo polígono desta mesma família, e defina x_i' e y_i' de maneira análoga. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i$.

105. (OBM-2014) Seja A uma matriz real inversível de ordem n e A^t a sua transposta. Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n > 0$ os autovalores de $A^t A$. Definimos a norma de A por $||A|| = \sqrt{\lambda_1}$ e o fator de dilatação de A por $d(A) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. Prove que, para quaisquer matrizes reais inversíveis A e B, $d(AB) \geq \frac{||AB||}{||A|| \cdot ||B||}(A)$.

106. (PUTNAM-2014)Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas racionais. Suponha que hajam pelo menos $m + n$ números primos distintos entre os valores absolutos das entradas de A. Mostre que o posto de A é pelo menos igual a 2.

107. (PUTNAM-2014) Seja A uma matriz $n \times n$ em que a entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna é dada por $a_{ij} = \frac{1}{min(i,j)}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Calcule $\det A$.

108. (ICM-2014) Determine todos os pares (a, b) de números reais para os quais existe uma única matriz simétrica M de ordem 2×2, com entradas reais tais satisfazendo $tr(M) = 0$ e $d \det(M) = b$.

109. (ICM-2014) Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma matriz simétrica $n \times n$ de entradas reais tal que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são seus autovalores. Mostre que

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ii} a_{jj} \geq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_i \lambda_j,$$

e determine todas as matrizes para as quais a igualdade ocorre.

110. (OBMU-2015) Seja Q uma matriz real ortogonal $n \times n$ (ou seja, temos $Q.Q^t = Q^t Q = I$). Seja P uma matriz de permutação $n \times n$ (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).
Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:
   (a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com $Q = U_0 P U_1$.
   (b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com $Q = L_0 P L_1$.

111. (PUTNAM-2015) Seja S o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas reais $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em que as entradas a, b, c e d (em alguma ordem) são termos consecutivos de um progressão aritmética. Determine todas as matrizes M em S para as quais existe algum inteiro $k > 1$ tal que M^k também seja um elemento de S.

112. (PUTNAM-2015)Seja n um inteiro positivo. Suponha que A, B e M sejam matrizes $n \times n$ com entradas reais tais que $AM = MB$ e que A e B possuem o mesmo polinômio característico. Prove que $det(A - MX) = det(B - XM)$ para toda matriz X de ordem $n \times n$ e entradas reais.

113. (ICM-2015) Para qualquer inteiro $n \geq 2$ e duas matrizes $n \times n$ com entradas reais A e B que satisfazem a equação

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Prove que $\det(A) = \det(B)$.

114. (ICM-2015) Sejam $n \geq 2, A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ pontos do espaço Euclideano n-dimensional, que não pertencem a um mesmo hiperplano, e B um ponto estritamente no interior do fecho convexo de $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Prove que $\angle A_B A > 90$ř ocorre para n pares (i, j) com $1 \leq i, j \leq n+1$.

115. (ICM-2015) Uma matriz complexa A de ordem $n \times n$ é chamada de *t-normal* se $A^t A = A A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Para cada n, determine a máxima dimensão do espaço linear das matrizes complexas de ordem nn consistindo das matrizes *t-normais*

116. (OBMU-2016)Encontre todas as matrizes 2×2 com entradas reais A tais que $A^3 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. onde I denota a matriz identidade 2×2.

117. (OBMU-2016)Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$. Prove que existe um unico $s \geq 0$ tal que o limite

$$c = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{vol\left(\{v \in \mathbb{R}^3; |v| \leq 1 \ e \ |Av| < \epsilon\}\right)}{\epsilon^s}$$

existe e e positivo, e determine s e c.

118. (ICM-2016) Sejam k e n inteiros positivos. Uma sequência $(A_1, \ldots, A_k)$ de matrizes reais $n \times n$ é *preferida* por Ivan O Confessor se $A_i^2 \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$, mas $A_i A_j = 0$ para $1 \leq i, j \leq k$, com $i \neq j$. Mostre que $k \leq n$ em todas as sequências preferidas, e dê um exemplo de uma sequência preferida para com $k - n$ para cada n.

119. (ICM-2016)Seja A uma matriz complexa $n \times n$ cujos autovalores têm valor absoluto no máximo 1. Prove que

$$||A^n|| \leq \frac{n}{\ln 2} ||A||^{n-1}.$$

(Aqui $||B|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Bx||$ para toda matriz B de ordem $n \times n$ e $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ para todo vetor $x \in \mathbb{C}^n$.

120. (ICM-2017) Determine todos os números complexos λ para os quais existe um inteiro positivo n e uma matriz real A de ordem $n \times n$ tal que $A^2 = A^t$ e λ é um auto valor de A.

121. (ICM-2017) Defina uma sequência $A_1, A_2, \ldots$ de matrizes pela seguinte recorrência

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

onde I_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$. Prove que A_n possui $n + 1$ autovalores inteiros e distintos $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ com multiplicidades $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, respectivamente.

122. (MÉXICO) Pinto, o cachorro, e Silvestre, o gato, jogam para preencher as entradas de uma matriz $n \times n$, onde n é um inteiro par. Alternadamente, começando por Pinto, cada um na sua vez coloca um número real num dos lugares que ainda tenha sido ocupado. Pinto ganha se a matriz obtida ao final é uma matriz invertível. Silvestre ganha, caso contrário. Qual dos jogadores pode garantir a vitória?

123. (OBMU-2015)Seja Q uma matriz real ortogonal $n \times n$ (ou seja, temos $QQ^t = Q^t Q = I$). Seja P uma matriz de permutação $n \times n$ (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:
   (a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com $Q = U_0 P U_1$.

(b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com $Q = L_0 P L_1$.

124. (OBMU-2016) Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{pmatrix}$. Encontre todos os pares de numeros $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ com $|m| \leq n$ tais que $A^n - (n^2 + m)A$ tenha todas as entradas inteiras.

125. (OBMU-2017) Sejam $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inteiros no-negativos. Seja M a matriz $n \times n$ com entradas

$$M_{i,1} = t^{k_i}, \quad M_{i,j+1} = \frac{d}{dt} M_{i,j}.$$

Prove que existem constantes C e r para as quais

$$\det(M) = Ct^r.$$

Encontre fórmulas simples para C e r.

126. (OBMU-2017) Sejam $d \leq n$ inteiros positivos e A uma matriz real $d \times n$, a qual induz uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^d$ por $v \mapsto A \cdot v$ (vemos os elementos de $\mathbb{R}^n$ como vetores coluna). Seja $\sigma(A)$ o supremo sobre todos os subespaços W de dimensao d de $\mathbb{R}^n$ de $\inf_{v \in W, |v|=1} |A \cdot v|$. Para cada $j \leq d$, seja $r(j) \in \mathbb{R}^n$ o j-ésimo vetor-linha de A, ou seja, $r(j) = A^t \cdot e_j$, onde e_j e o j-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^d$. Prove que:

$$\sigma(A) \leq \min_{i \leq d} d(r(i), \langle r(j), j \neq i \rangle) \leq \sqrt{n} \cdot \sigma(A).$$

Obs.: $|\cdot|$ denota a norma euclideana; A^t e a matriz transposta de A; $d(r(i), \langle r(j), j \neq i \rangle)$ denota a distância de $r(i)$ ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $r(j), 1 \leq j \leq d,\ j \neq i$.

127. (OBMU-2018) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para quantos números naturais n existe uma matriz real X tal que $X^n = A$?

128. (OBMU-2018)Seja $GL_2(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2×2 inversíveis com elementos reais. Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) com a seguinte propriedade: se $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ são tais que $A \cdot B^m = B^m \cdot A$ e $A \cdot B^n = B^n \cdot A$, então A e B comutam, i.e., $AB = BA$.

129. (ICM-2018) Determine todos os números racionais a para os quais a matriz $\begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$ é o quadrado de uma matriz cujas entradas são números racionais.

130. (PUTNAM-2018)Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \cdots, n\}$ em alguma ordem e sej M uma matriz de ordem $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ cujo elementos m_{ij} é dada por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } S_i \cap S_j = \emptyset \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o determinante de M.

131. (ICM-2018) Seja k um inteiro positivo. Determine o menor inteiro positivo n para o qual existem k vetores $v_1, \ldots, v_k$ não nulos de $\mathbb{R}^n$ tais que para cada par i, j de índices com $|i - j| > 1$ os vetores v_i e v_j são ortogonais.

132. (OBMU-2019) Seja C o disco de raio 1 centrado na origem de $\mathbb{R}^2$ e considere a transformação linear

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\tfrac{5x+3y}{4}, \tfrac{3x+5y}{4}\right). \end{aligned}$$

Qual o menor n natural para o qual $T^n(C)$ contém pelo menos 2019 pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$?

133. (OBMU-2019)Seja n um inteiro ímmpar e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Qual é a menor dimensão possível do espaço gerado pelos vetores $v_1 + v_2; v_2 + v_3; v_3 + v_4; \ldots; v_{n?1} + v_n; v_n + v_1$?

134. (ICM-2019) Um número de quatro dígitos $YEAR$ é chamado de *muito bom* se o sistema

$$\begin{aligned} Yx + Ey + Az + Rw &= Y \\ Rx + Yy + Ez + Aw &= E \\ Ax + Ry + Yz + Ew &= A \\ Ex + Ay + Rz + Yw &= R \end{aligned}$$

de equações lineares nas variáveis x, y, z e w tem pelo menos duas soluções. Determine todos $YEAR$s *muito bons* do século 21.

135. (ICM-2019) Determine quando existe um inteiro positivo ímpar n e matrizes A e B de ordem $n \times n$, com entradas inteiras, que satisfazem as seguintes condições:

(1) $\det(B) = 1$;

(2) $AB = BA$;

(3) $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$.

(Aqui I denota a matriz identidade $n \times n$).
(Sugestão: Considere os determinantes módulo 4.)

136. (ICM-2019) Determine todos os inteiros positivos n para os quais existem matrizes invertíveis A e B de ordem $n \times n$ tais que $AB - BA = B^2 A$.

137. (OBMU-2019)Seja $M_2(\mathbb{R})$ o anel das matrizes 2 com entradas reais e sejam $I_2 \in M_2(\mathbb{R})$ e $0 \in M_2(\mathbb{R})$ as matrizes identidade e nula respectivamente. Quantas matrizes $X \in M_2(\mathbb{R})$ satisfazem a equação $X^2 + I = 0$?

138. (OBMU-2019)Para quantos valores de n inteiros positivos o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & -2^n \end{pmatrix}$ é divisível por 7?

139. (OBMU-2019)Seja $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ o espaço de todas as matrizes 3×3 de coeficientes reais. Se S o subespaço de $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ gerado pelas matrizes da forma $AB - BA$, com A e B em $M(3 \times 3, \mathbb{R})$, encontre a sua dimensão.

140. (OBMU-2019)Seja A uma matriz real 3×3 tal que $Posto(A) = 1$ e $tr(A) = 3$. Determine o valor de $det(A + I)$.

141. (OBMU-2019) Sejam I e 0 as matrizes quadradas identidade e nula, ambas de tamanho 2019. Existe uma matriz quadrada A com entradas racionais e tamanho 2019 tal que:

    (a) $A^3 + 6A^2 - 2I = 0$?

    (b) $A^4 + 6A^3 - 2I = 0$?

142. (PUTNAM-2019) Sejam Q uma matriz ortogonal $n \times n$ e $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor-coluna unitário (isto é, $u^t \cdot u = 1$). Seja $P = I - 2u.u^t$, onde I é a matriz identidade $n \times n$. Mostre que se 1 não é um autovalor de Q, então 1 é um autovalor de PQ.

5 Poderia cair na olimpíada?

1. Se $A_1, \cdots, A_k \in (n \times n, \mathbb{R})$ são matrizes tais que
$$A_1^t \cdot A_1 + \cdots + A_k^t \cdot A_k = 0_n$$
Mostre que $A_1 = \cdots = A_k = 0_n$.

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Mostre que
$$A^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} -n^2+n+8 & n^2-n & n^2+3n \\ -n^2+5n & n^2-5n+8 & n^2-n \\ -4n & 4n & 4n+8 \end{pmatrix}$$

3. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1.00001 & 1 \\ 1.00001 & 1 & 1.00001 \\ 1 & 1.00001 & 1 \end{pmatrix}$ possui um autovalor positivo e um autovalor negativo.

4. Existe alguma matriz $X \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ tal que
$$X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

5. Sejam A e B matrizes reais 2×2 tais que $A^2 = B^2 = I$ e $AB + BA = 0$. Prove que existem uma matriz real e invertível T tal que
$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. A sequência $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \cdots, c_n, \cdots)$, cujos elementos são os chamados **números de Catalan**, cujo termo geral é dado por $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, para $n \geq 0$, é utilizada para construir a seguinte sequência de matrizes:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{pmatrix}, \cdots$$
Mostre que cada uma das matrizes dessa sequência possui determinante igual a 1.

7. (FRANÇA) Sejam n um inteiro positivo e $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $A^3 + A^2 + I = 0$. Mostre que:
$$0,8^n \leq |\det(A)| \leq 1,5^n.$$

8. Seja A uma matriz 3×3 dada por $A(z) = \begin{pmatrix} 4z^2 & 1 & -1 \\ -1 & 2z^2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para quantos valores distintos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| < 1$, a matriz $A(z)$ é invertível.

9. Sejam A e B matrizes complexas de mesma ordem tais que $AB^2 - B^2A = B$. Prove que B é nilpotente.

10. Sejam $A_1, \ldots. A_m \in M_n(\mathbb{C})$ tais que $A_1 + \ldots + A_m = mI_n$ e $A_1^2 = \ldots = A_m^2 = I_n$. Prove que $A_1 = \ldots = A_m$.

11. Sejam $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ e um polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ não constante tal que $P(0) \neq 0$ e $AB = P(A)$. Mostre que A é invertível e que $AB = BA$.

12. Seja $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ uma matriz diagonalizável. Mostre que existe $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que $A = P(A^3)$.

13. Seja A uma matriz Hermitiana $n \times n$ satisfazendo a condição $A^5 + A^3 + A = 3I$. Mostre que $A = I$.

14. Determine uma matriz real B tal que
$$B^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Sejam $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(AB - BA)^2 = \alpha.I$, onde i é a matriz identidade.

Referências

[1] Andreescu, Titu, Essential Linear Algebra with Applications - A Problem Solving Approach, Birkhauser, 2010.

[2] Andreescu, Titu, Putnam and Beyond, Springer Verlag, 2007.

[3] Lima, Elon Lages, Álgebra Linear, SBM - RJ, 1998.

[4] www.obm.org.br

[5] www.imc-math.org.uk