Casos particulares, indução e algoritmos

Carlos Shine

Nesse texto veremos algumas ideias básicas, mas extremamente importantes em combinatória e heurísticas em geral.

Na maioria dos problemas teremos uma parte extra chamada *Rascunho* para mostrar os "bastidores" das soluções, e também na ordem em que pensei no problema. Só depois vamos escrever uma solução mais limpa, melhor ordenada e concisa, o que é um bom hábito não só nesse tipo de problema (que, sendo sincero, é composto de praticamente todos os problemas de matemática), mas em geral. É importante saber o que é realmente necessário ou não para uma solução, tanto do ponto de vista de legibilidade (ou seja, evitar soluções curtas demais) como de ideias supérfluas (ou seja, economizar tempo para o corretor). Em geral, o rascunho termina no momento em que a solução do problema parece aparente, o que às vezes é quando o problema está essencialmente resolvido, e em outras vezes quando percebemos que temos todas as ideias necessárias para terminar o problema, mas essas ideias ainda não estão totalmente integradas entre si.

A principal consequência dessa estrutura é que cada problema vai ter um espaço maior do que o normal.

1 Casos particulares

Estudar casos particulares, especialmente os casos pequenos, costuma ajudar a resolver problemas. Normalmente, eles não dão pontos nas olimpíadas, mas podem dar algo mais valioso: um entendimento melhor do problema.

1.1 Conjecturando respostas

Casos pequenos/particulares em geral podem ser bastante úteis para encontrar a resposta para alguns problemas.

Exemplo 1. Há n carros, numerados de 1 a n, e uma fileira com n lugares para estacionar, numerados de 1 a n. Cada carro i tem seu lugar favorito a_i; quando vai estacionar, se dirige ao seu lugar favorito; se ele está livre estaciona ali, caso contrário, avança para o primeiro lugar livre e estaciona; se não encontra lugar livre, vai embora e não volta mais. Quantas sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ existem tais que todos os n carros conseguem estacionar?

Rascunho. Vamos listar alguns casos pequenos para entender o que está acontecendo:

Para $n = 1$, só há, é claro, uma possibilidade: (1).

Para $n = 2$, só não dá certo $(2, 2)$. As outras três $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$ dão certo.

Vejamos $n = 3$. As seis permutações $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$ obviamente dão certo. Além disso, note que algum carro deve ter 1 como vaga favorita, senão todos os carros passarão direto pela vaga 1 e algum deles não vai estacionar. As outras possibilidades são $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, que funcionam, e $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$ que não funcionam, além das outras $2^3 = 8$ que não contêm 1. Note que já lista todas as $3^3 = 27$ possibilidades. Com isso, o total é 16.

Trabalhemos agora com $n = 4$. São $4^4 = 256$ possibilidades, então não vale a pena listar todos, ou seja, precisamos de alguma estratégia de contagem. Contemos por quantidade de uns. Já temos $3^4 = 81$ possibilidades que não funcionam (as que não tem 1). Além disso, é fácil ver que $(1, 1, 1, k)$ funciona. Com isso, temos $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, k)$ com $k = 2, 3, 4$ e permutações, que são mais $1 + 4 \cdot 3 = 13$

possibilidades que funcionam. Os que têm exatamente dois uns só não funcionam se são $(1,1,4,4)$ ou permutações. Mais $\frac{4!}{2!\,2!}=6$ que não funcionam e $\binom{4}{2}\cdot 3\cdot 3-6=48$ que funcionam. Entre os $4\cdot 3^3=108$ que só têm um 1, retiramos o 1 (esse carro com certeza vai conseguir estacionar) e subtraímos 1 de cada outro número, e é possível estacionar se, e somente se, a sequência de três termos é válida. Com isso, temos $4\cdot 16=64$ possibilidades que funcionam. O total é $13+48+64=125$.

Vejamos: se x_n é a quantidade pedida, temos $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=16=4^2$ e $x_4=125=5^3$. Parece que $x_n=(n+1)^{n-1}$, ou seja, a gente deve conseguir uma bijeção das sequências com $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^{n-1}$. Mas aí temos que conseguir uma associação entre sequências com n termos e sequências com $n-1$ termos, o que não parece ser interessante. Talvez seja mais fácil conseguir uma bijeção entre $(\text{sequência},k)$, $1\le k\le n+1$ e $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^n$.

Podemos fazer a solução agora.

Solução. A resposta é $(n+1)^{n-1}$. Mostraremos uma bijeção entre $(\text{sequência},k)$, $1\le k\le n+1$ e $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^n$.

Pensamos em $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^n$ primeiro. Considere então uma nova vaga $n+1$, e as regras continuam as mesmas. Uma ideia que facilita a divisão por $n+1$ é considerar permutações cíclicas, ou seja, vamos supor que as vagas estão em círculo. Desse modo, com as mesmas regras, todos os carros estacionam (por estarem em círculo, sempre aparece uma vaga livre!), e sobra uma vaga livre no final. Por simetria, há $\frac{(n+1)^n}{n+1}=(n+1)^{n-1}$ configurações com i sendo a vaga livre, $1\le i\le n+1$. Afirmamos que uma configuração corresponde a uma sequência válida se, e somente se, a vaga livre é $n+1$.

De fato, se a sequência é válida, os carros nunca chegam a precisar da vaga $n+1$, e ela nunca chega a ser usada. Reciprocamente, se a vaga livre é $n+1$, nenhum carro listou $n+1$ como vaga favorita no novo processo e, mais ainda, $n+1$ nunca foi usada como vaga livre, ou seja, nenhum carro passa da vaga n, o que significaria que ele iria embora. Logo o problema está terminado (de fato, a bijeção é feita entre sequências válidas e não válidas e $\{1,2,3,\ldots,n+1\}^n$, sendo que a sequência é válida se, e somente se, a vaga que sobra é $n+1$). $\square$

Exemplo 2. (Romênia 2003 TST) Em um torneio de matemática há $2n$ participantes. Cada um deles manda um problema para o júri, que depois dá para cada participante um dos $2n$ problemas. O torneio é dito *justo* quando existem n participantes que receberam os problemas dos outros n participantes.

Prove que a quantidade de distribuções de problemas em torneios justos é um quadrado perfeito.

Solução. Seja a_n a quantidade de distribuções de problemas em torneios justos com $2n$ participantes. Temos $a_1=1$ (as duas pessoas trocam de problemas entre si).

Calculemos a_2: a pessoa 1 tem 3 escolhas para quem vai receber seu problema; chame essa pessoa de 2. Ela ainda pode mandar problema para qualquer um dos outros (3 escolhas).

- Se ela mandar para 1, não há escolhas para os outros dois a não ser trocarem problemas;
- Se não, suponha que mandou para a pessoa 3. Então os dois conjuntos de participantes são 1 e 3 e, por exclusão, 2 e 4. Para quem a pessoa 3 manda o seu problema? A pessoa 2 já recebeu seu problema, e a pessoa 1 está no mesmo conjunto, então só pode ser a pessoa 4. A pessoa 4 só pode mandar seu problema para 1, já que os outros já têm seus problemas.

Ou seja, em qualquer caso, só há uma escolha. Com isso, $a_2=3\cdot 3=9$.

Mais um caso pequeno: vejamos como calcular a_3. Tentemos a mesma ideia: a pessoa 1 tem 5 escolhas; chame de 2 a pessoa que recebeu o problema de 1. A pessoa 2 tem 5 escolhas de novo. Novamente dividimos em casos:

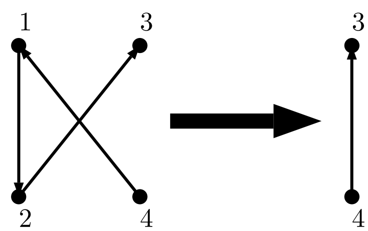
- Se 2 manda um problema de volta para 1, basta distribuir os quatro problemas entre as pessoas que sobraram. Há $a_2=9$ possibilidades para fazer isso. (Opa! Olha uma recursão aparecendo!)
- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, temos parte de um conjunto: $\{1,3,x\}$. A pessoa 3 não pode mandar problemas para 1 ou 2, então manda para outra das 3 pessoas, digamos a pessoa 4. Com isso, temos o outro conjunto $\{2,4,y\}$. Essa pessoa tem 3 escolhas: 1 ou as outras duas pessoas (note que 3 já recebeu o seu problema). Se for 1, sobram as outras duas e essas pessoas trocam problemas entre si. Se não for 1 e for, digamos 5, os conjuntos são $\{1,3,5\}$ e $\{2,4,6\}$ e 5 só pode mandar problema para 6, e 6 para 1. Novamente, temos $3\cdot 3=9$ possibilidades.

Logo $a_3 = 5^2 \cdot 9 = 225 = 15^2 = (1 \cdot 3 \cdot 5)^2$.

Parece que $a_n = (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^2 = ((2n-1)!!)^2$ (sim, a notação para o "imparial" $(2n-1)!!$ existe; além disso, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot n!$). Vamos provar isso.

Note então que, se estivermos certos, $a_n = (2n-1)^2 \cdot a_{n-1}$. Ou seja, fazemos o primeiro passo, escolhendo a pessoa 2 que recebe problema de 1 e em seguida a pessoa que recebe o problema de 2. No caso em que 2 manda problema para 1, a recursão fica clara. Mas e o segundo caso? Voltando ao caso $n = 3$ e pensando um pouco mais, o segundo caso pode ser simplificado:

- Se 2 manda para outra pessoa, digamos 3, faça o seguinte: já temos que 1 e 2 estão em conjuntos diferentes e que 1 e 3 estão no mesmo conjunto. Chame de 4 a pessoa que manda problema para 1. Essa pessoa 4 está no mesmo conjunto que 2. Agora, exclua 1 e 2 da lista de participantes e considere o torneio com duas pessoas (1 e 2) a menos e as pessoas mandam problemas para os mesmos participantes, exceto 4, que manda problema para 3. Em outras palavras, fazemos isso:

  Como sabemos que 3 e 4 estão em conjuntos diferentes, esse torneio também precisa ser justo. Com isso, há a_2 possibilidades nesse caso.

Esse argumento anterior pode ser usado no caso geral também (já que não mencionamos números maiores do que 4). Logo

$$a_n = (2n-1)^2 \cdot a_{n-1}$$

e podemos "telescopar" para terminar o problema: sendo $\frac{a_n}{a_{n-1}} = (2n-1)^2$,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = (2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2 \implies a_n = (2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2 a_1 = ((2n-1)!!)^2,$$

que é um quadrado perfeito. □

1.2 Procurando estrutura

No que segue, veremos que estudar casos pequenos não se resume só a achar conjecturas para respostas, mas também para entender melhor a estrutura do problema. Isso muitas vezes requer não só listar todos os casos exaustivamente, mas também fazer associações tanto entre entidades do problema como entre um caso e um ou mais casos anteriores.

Exemplo 3. (IMO 2008/5) Sejam n e k números inteiros positivos tais que $k \geq n$ e $k - n$ é um número par. São dadas $2n$ lâmpadas numeradas de 1 a $2n$, cada uma das quais pode estar *acesa* ou *apagada*. Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Uma *operação* consiste em alterar o estado de exatamente uma das lâmpadas (de acesa para apagada ou de apagada para acesa). Consideremos sequências de operações.

Seja N o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas.

Seja M o número de sequências com k operações após as quais as lâmpadas de 1 a n estão todas acesas e as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ estão todas apagadas, e durante as quais todas as lâmpadas de $n+1$ a $2n$ permanecem sempre apagadas.

Determine a razão $\frac{N}{M}$.

Rascunho. Primeiro é preciso entender que a ordem das operações é importante, de modo que uma sequência de operações é uma k-upla ordenada de lâmpadas. Parece ser interessante ver casos pequenos em k deixando n fixado.

Se $k = n$, não há o que fazer a não ser escolher as n primeiras lâmpadas. Ou seja, nesse caso $N = M$.

Se $k = n + 2$, na contagem de M podemos escolher uma das n primeiras lâmpadas três vezes, dando um total de $M = n \cdot \frac{(n+2)!}{3!}$; na contagem de N, os casos não contados são aqueles em que qualquer uma das outras n lâmpadas é escolhida duas vezes, dando um total de $n \cdot \frac{(n+2)!}{2!} = 3M$; logo $N = 4M \iff \frac{N}{M} = 4$.

Se $k = n + 4$, na contagem de M podemos escolher uma das n primeiras lâmpadas 5 vezes ou duas das n primeiras lâmpadas 3 vezes. Assim, $M = n \cdot \frac{(n+4)!}{5!} + \binom{n}{2} \cdot \frac{(n+4)!}{3!\,3!}$. Para contar N, temos alguns casos adicionais: uma das outras n lâmpadas é escolhida 2 vezes e uma das n primeiras 3 vezes, ou duas das outras n lâmpadas é escolhida 2 vezes, ou uma das outras n lâmpadas é escolhida 4 vezes. Assim, $N - M = n \cdot n \cdot \frac{(n+4)!}{2!\,3!} + \binom{n}{2} \cdot \frac{(n+4)!}{2!\,2!} + n \cdot \frac{(n+4)!}{4!}$. Interessantemente, temos graus diferentes nos termos acima. Tudo o que podemos fazer é torcer que eles se cortem correspondentemente (ou talvez ter algo que dependa de n). Os termos em $\binom{n}{2}(n + 4)!$, lembrando que $n^2 = 2\binom{n}{2} + n$, são $\frac{1}{3!\,3!} = \frac{1}{36}$ em M e $\frac{2}{2!\,3!} + \frac{1}{2!\,2!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ em $N - M$; a razão é $\frac{5}{12} : \frac{1}{36} = 15$. Os termos em $n(n + 4)!$ são $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ em M e $\frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ em $N - M$; a razão é $\frac{1}{8} : \frac{1}{120} = 15$. Que sorte! Logo $N - M = 15M \iff \frac{N}{M} = 16 = 2^4$.

Para $k = n$ obtemos $\frac{N}{M} = 1 = 2^0$; para $k = n + 2$, obtemos $\frac{N}{M} = 4 = 2^2$; para $k = n + 4$, obtemos $\frac{N}{M} = 16 = 2^4$. Parece então que $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$. Podemos parar por aqui, mas as contas acima ainda não revelam muito sobre a estrutura do problema. Vamos investigar mais a fundo mais alguns casos pequenos.

O número $k - n$ são, de certo modo, as operações que "temos sobrando" após acender as n primeiras lâmpadas. Isso, e o fato de que as parcelas de N e M se "cortaram" de modo correspondente nos leva a crer que podemos encontrar uma correspondência 1 para 2^{k-n} entre as sequências que usam só as primeiras n lâmpadas e todas as sequências.

Como fazer a correspondência? Vamos investigar mais o caso $n = 1$ e $k - n = 4$, ou seja, $k = 5$: temos $M = 1$ pois só temos uma lâmpada disponível: $(1, 1, 1, 1, 1)$. Devemos ter $N = 16$. Temos, além de $(1, 1, 1, 1, 1)$, as sequências $(2, 2, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1, 2)$, $(1, 2, 2, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 2, 2)$, $(1, 2, 2, 2, 2)$, $(2, 1, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 1, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 1, 2)$ e $(2, 2, 2, 2, 1)$. Quais são as posições onde usamos a lâmpada 2? São, respectivamente, $\emptyset$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$. Os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com cardinalidade par!

Mais um exemplo para entender um pouco melhor: $n = 2$ e $k - n = 2$, para podermos usar mais do que duas lâmpadas extras (vamos diminuir um pouco $k - n$ para não ficar com muitos casos). Temos $M = 8$: $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$ e os simétricos trocando 1 por 2. Temos também $N = 32$. Além das sequências dadas, temos as com a lâmpada 3 com dois toques e 4 com dois toques: $(1, 2, 3, 3)$, $(1, 3, 2, 3)$, $(1, 3, 3, 2)$, $(2, 1, 3, 3)$, $(2, 3, 1, 3)$, $(2, 3, 3, 1)$, $(3, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 3, 2)$, $(3, 2, 1, 3)$, $(3, 2, 3, 1)$, $(3, 3, 1, 2)$, $(3, 3, 2, 1)$ e os análogos com 4 no lugar de 3. Se mantivermos os 1's e 2's, podemos associar $(1, 2, 3, 3)$ a $(1, 2, 1, 1)$, $(1, 3, 2, 3)$ a $(1, 1, 2, 1)$, e assim por diante, trocando 3's por 1's. Note que associamos $(3, 2, 1, 3)$ e $(3, 2, 3, 1)$ também a $(1, 2, 1, 1)$, e temos um total de quatro associações: usamos as posições $\emptyset$ (para $(1, 2, 1, 1)$), $\{1, 3\}$ (para $(3, 2, 3, 1)$), $\{1, 4\}$ (para $(2, 3, 1, 3)$) e $\{3, 4\}$ (para $(1, 2, 3, 3)$), que são os subconjuntos de $\{1, 3, 4\}$ com cardinalidade par. E os exemplos com 4? Juntamos os exemplos com três ocorrências de 2.

Com isso, talvez estejamos prontos para o caso geral (caso não esteja, pense no caso $n = 2$ e $n - k = 4$!), e podemos ir para a solução (que com certeza será bem mais curta que esse rascunho).

Solução. A resposta é $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$ e provaremos esse fato usando uma associação 1 para 2^{k-n} entre as M sequências que só usam as primeiras n lâmpadas e as N sequências que usam todas as lâmpadas. Para tanto, faça pares de lâmpadas $(i, i + n)$, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Considere uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ que só usa as n primeiras lâmpadas e suponha que a lâmpada i, $1 \le i \le n$, seja usada $2m_i + 1$ vezes. Note que $(2m_1 + 1) + (2m_2 + 1) + \cdots + (2m_n + 1) = k$. Considere subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, todos de cardinalidade par, das posições das operações nas lâmpadas $1, 2, \ldots, n$, respectivamente. Esses subconjuntos de operações em i serão substituídas por operações em $i+n$. Por exemplo, para $n=3$ e $k=7$, associamos $(1,1,2,3,1,3,3)$ e $(\{1,5\},\emptyset,\{6,7\})$ a $(4,1,2,3,4,6,6)$.

Essa operação é facilmente invertível, pois basta trocar de volta $n+i$ por i e observar as posições de troca para recuperar $A_1,\dots,A_n$. Como devemos manter os estados das lâmpadas, todos os conjuntos A_i têm cardinalidade par.

Assim, temos a nossa associação, e cada sequência que só usa as n primeiras lâmpadas está associada a $2^{2m_1}\cdot 2^{2m_2}\cdot\ldots\cdot 2^{2m_n}=2^{2m_1+2m_2+\cdots+2m_n}=2^{n-k}$. □

Comentário. Por completude, vamos mostrar que a quantidade de subconjuntos de cardinalidade par de um conjunto de n elementos é 2^{n-1}. Há várias maneiras de se fazer isso; iremos mostrar uma bijeção entre os subconjuntos de cardinalidade par e os subconjuntos de cardinalidade ímpar. Tome um elemento qualquer x do conjunto; para cada subconjunto S, defina

$$f(S)=\begin{cases} S\cup\{x\} & \text{se } x\notin S\\ S\setminus\{x\} & \text{se } x\in S\end{cases}.$$

Por exemplo, se o conjunto é $\{1,2,3\}$ e $x=3$,

$$f(\emptyset)=\{3\},\quad f(\{1\})=\{1,3\},\quad f(\{2\})=\{2,3\},\quad f(\{3\})=\emptyset,$$
$$f(\{1,2\})=\{1,2,3\},\quad f(\{1,3\})=\{1\},\quad f(\{2,3\})=\{2\}\quad\text{e}\quad f(\{1,2,3\})=\{1,2\}.$$

Note que $f(f(S))=S$, ou seja, f é uma involução e, portanto, uma bijeção, e que $|f(S)|=|S|\pm1$, ou seja, ela leva subconjuntos de cardinalidade para conjuntos de cardinalidade ímpar e vice-versa. Logo a quantidade de subconjuntos de cardinalidades par e ímpar são iguais, e são em um total de $\frac{1}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}$. □

No próximo exemplo veremos como associar casos com os anteriores.

Exemplo 4. (IMO 2019/5) O Banco de Bath emite moedas com um H num lado e um T no outro. Harry possui n dessas moedas colocadas em linha, ordenadas da esquerda para a direita. Ele repetidamente realiza a seguinte operação: se há exatamente $k>0$ moedas mostrando H, então ele vira a k-ésima moeda contada da esquerda para a direita; caso contrário, todas as moedas mostram T e ele para. Por exemplo, se $n=3$ o processo começando com a configuração THT é $THT\to HHT\to HTT\to TTT$, que acaba depois de três operações.

(a) Mostre que, para qualquer configuração inicial, Harry para após um número finito de operações.

(b) Para cada configuração inicial C, seja $L(C)$ o número de operações antes de Harry parar. Por exemplo, $L(THT)=3$ e $L(TTT)=0$. Determine a média de $L(C)$ sobre todas as 2^n possíveis configurações iniciais C.

Rascunho. A primeira observação a se fazer é que só precisamos fazer a parte (b), pois como a quantidade de configurações iniciais é finita, se calcularmos $L(C)$ e ele for finito então a soma da quantidade de operações é finita e portanto a quantidade de operações para cada configuração é finita.

Agora, vamos aos casos pequenos.

- $n=1$: Não há muito o que fazer: $H\to T$ e T, dando média $\frac{1}{2}$.
- $n=2$: Temos $TH\to HH\to HT\to TT$, dando média $\frac{3+2+1+0}{4}=\frac{3}{2}$.
- $n=3$: Temos $THH\to TTH\to HTH\to HHH\to HHT\to HTT\to TTT$ e $THT\to HHT\to HTT\to TTT$, dando média $\frac{1}{8}(6+5+4+3+2+1+0+3)=3$. Parece que montar um grafo ajuda:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & THT\to & HHT & \to HTT\to TTT\\ & & & & \uparrow & \\ THH\to & TTH\to & HTH\to & HHH & & \end{array}$$

- $n = 4$: Temos $TTHT \to THHH \to THTH \to TTTH \to HTTH \to HHTH \to HHHH \to HHHT \to HHTT \to HTTT \to TTTT$, $HTHH \to HTTH \to HHTH \to HHHH \to HHHT \to HHTT \to HTTT \to TTTT$, $HHTH \to HTTH \to HHTH \to HHHH \to HHHT \to HHTT \to HTTT \to TTTT$, $THHT \to TTHT \to HTHT \to HHHT \to HHTT \to HTTT \to TTTT$. O grafo é um pouco mais complicado, mas é bem estruturado também:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & & & THTT \arrow[r] & HHTT \arrow[r] & HTTT \arrow[r] & TTTT \\
 & & THHT \arrow[r] & TTHT \arrow[r] & HTHT \arrow[r] & HHHT \arrow[u] & & \\
 & & HTHH \arrow[r] & HTTH \arrow[r] & HHTH \arrow[r] & HHHH \arrow[u] & & \\
TTHT \arrow[r] & THHH \arrow[r] & THTH \arrow[r] & TTTH \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

  Dá para perceber um padrão? As duas primeiras linhas são parecidas ao caso $n = 3$, e as outras duas também. São duas cópias do mesmo grafo "grudadas" pela aresta $HHHH \to HHHT$.

  Com isso, podemos calcular a média para $n = 4$ sem muita dor: a soma de $L(C)$ das duas primeiras linhas é, do caso $n = 3$, $8 \cdot 3 = 24$, e a soma de $L(C)$ das outras duas é $24 + 4 \cdot 8 = 56$, pois cada caminho de baixo precisa do trajeto $HHHH \to HHHT \to HHTT \to HTTT \to TTTT$, que tem 4 passos. O total é 80, e a média é $\frac{80}{16} = 5$.

Mas mais do que isso, podemos conjecturar uma recursão para a média E_n: temos (?)

$$E_n = \frac{2^{n-1}E_{n-1} + (2^{n-1}E_{n-1} + 2^{n-1} \cdot n)}{2^n} = E_{n-1} + \frac{n}{2}.$$

Isso é facilmente telescopável, e junto com $E_1 = \frac{1}{2}$ nos dá $E_n = \frac{n(n+1)}{4}$. Vejamos se dá certo: para $n = 2$ obtemos $\frac{2\cdot 3}{4} = \frac{3}{2}$; para $n = 3$ obtemos $\frac{3\cdot 4}{4} = 3$; e para $n = 4$, obtemos $\frac{4\cdot 5}{4} = 5$. Até agora deu certo!

Vamos olhar com mais calma esse grafo para $n = 4$. A primeira metade é essencialmente a mesma coisa que o caso $n = 3$, com um T no final. Isso faz sentido: para mudar um T no final, devemos ter todos iguais a H, o que não é possível. Assim, se houver T no final, ele não sai. Logo, se uma sequência é da forma $*T$, então $L(*T) = L(*)$.

A parte interessante é a outra metade do grafo, a que termina com H; esse último H só muda quando temos $HHHH$, de modo que a única aresta ligando as duas metades é $HHHH \to HHHT$; no caso geral, $HH\ldots HH \to HH\ldots HT$. Além disso, tirando o último H, a sequência é obtida através do caso $n = 3$ trocando H's por T's e vice-versa, e invertendo a ordem. Vejamos por quê: suponha que P e Q são sequências no caso anterior tais que $P \to Q$, e que temos m H's em P; aí trocamos a m-ésima letra de P, obtendo Q. Após a dupla inversão, temos $n+1-m$ em P', e trocamos a $(n+1-m)$-ésima letra de P', que é a mesma que a m-ésima letra de P, obtendo a transformada correspondente Q'. Isso prova toda a estrutura do grafo, e essencialmente o problema.

Vamos à solução!

Solução. Seja E_n a média dos 2^n valores de $L(C)$ para todas as sequências C de tamanho. Provaremos que $E_n = \frac{n(n+1)}{4}$, o que também resolve o item (a), pois a quantidade de sequências é finita e portanto, se E_n é finito, a soma de todos os valores $L(C)$ é finita, o que implica que $L(C)$ é finito para todo C.

Note que só podemos mudar o último termo de uma sequência de tamanho n se ela tiver n H's, ou seja, é $HH\ldots H$. Assim se uma sequência termina com T, ela nunca deixa de ter T no final. Assim, dada uma sequência xT que termina com T, em que x é uma sequência de $n-1$ termos, temos $L(xT) = L(x)$.

Agora, considere uma sequência xH, e seja x' a sequência obtida após trocar todo H por T e vice-versa e invertendo a ordem da sequência; por exemplo, se $x = HTHHHHT$ então $x' = HTTTTHT$. Então, se xH é levado para yH, $x \neq HHH\ldots H$, então x' é levado para y': se xH tem m H's e $n-m$ T's, então yH é obtido trocando a m-ésima posição de xH; nesse caso, x' tem $m-1$ T's e $n-m$ H''s, e a posição a ser trocada é $n-m$, que, com a inversão corresponde à posição $n-1+1-(n-m) = m$ de x. Então a troca é a mesma, e x' é levado para y'. Assim, a quantidade de passos para chegar de xH a

$HHH \dots H$ é igual à quantidade de passos para chegar de x' a $TTT \dots T$, que é $L(x')$, e considerando que para ir de $HHH \dots H$ para $TTT \dots T$ precisamos de mais n operações, temos $L(xH) = L(x') + n$. Note que a função $x \to x'$ é uma bijeção, pois é uma involução ($x \to x' \to x$).

Finalmente, sendo A_{n-1} o conjunto das sequências de tamanho $n-1$, somando tudo e considerando que $x \to x'$ é uma bijeção temos

$$2^n E_n = \sum_{x \in A_{n-1}} L(x) + \sum_{x \in A_{n-1}} (L(x) + n) = 2^{n-1} E_{n-1} + 2^{n-1}(E_{n-1} + n) \implies E_n = E_{n-1} + \frac{n}{2}.$$

Como $E_1 = \frac{1}{2}$, pois $H \to T$ tem uma operação e T não tem, temos por indução $E_n = \frac{n(n+1)}{4}$, concluindo a demonstração de ambos os itens. □

Comentário. Note como não precisamos do grafo na solução, mas como seria difícil perceber o padrão sem ele.

1.3 Resumindo

Estudar casos pequenos/particulares, por mais simples que seja, ajuda a dar informação relevante para o problema, revelando estruturas que podem não ser imediatas. Vamos sistematizar essa ideia.

Casos pequenos/particulares

1. Se for o caso, trocar um número grande (como 100, ou 2020) por uma variável n. Pode ser que propriedades do número sejam relevantes (ser par ou primo, por exemplo), então tome cuidado na hora de generalizar.

2. Identificar que caso particular estudar. Em muitos casos, isso é imediato (uma variável só), mas pode não ser em outros (veja o problema 5 da IMO 2008 acima). Pode ser que o caso particular relevante seja primos, caso o problema envolva divisibilidade; pode ser que haja duas variáveis, e valha a pena só especializar uma delas (veja o mesmo exemplo).

3. Verificar se os casos particulares precisam ser divididos (por exemplo, pares/ímpares ou pelo resto módulo algum número).

4. Estudar os casos pequenos, mesmo que sejam triviais. Conjecturar respostas caso seja necessário. A resposta sugere alguma ideia/técnica? Por exemplo, se a resposta é 2^n vale a pena considerar subconjuntos de um conjunto com n elementos; se é $n!$, considerar permutações; se o caso for primo p e a resposta é $p-1$ pensar em ordem ou mdc, e assim por diante.

5. Comparar casos particulares (por exemplo, $n-1$ com n), com o intuito de observar alguma estrutura ou ideia comum. Se for conveniente, fortalecer ou corrigir conjecturas.

6. Se você não obteve muitas ideias, talvez valha a pena estudar mais alguns casos para ter uma noção melhor da estrutura ou rever os casos calculados anteriormente para ver alguma relação interna, ou rever os casos por algum outro ponto de vista.

7. Usar as ideias e resolver o problema.

8. Importante: tenha sempre na sua mente algumas estruturas prontas: permutações, subconjuntos, árvores, grafos, ciclos (em grafos ou permutações), tabuleiros etc.

2 Indução

O princípio da indução finita é também uma técnica básica bastante usada, mas que tem uma certa complexidade. Muitas vezes começamos uma demonstração por indução sem saber exatamente o que queremos provar.

Para relembrar, indução funciona da seguinte forma: dada uma proposição $P(n)$ que depende de uma variável n inteira,

1. Mostramos os casos iniciais (**base de indução**), em geral $P(0)$, $P(1)$, ou $P(n_0)$.

2. Reduzimos $P(n)$ a algum caso anterior. Os casos anteriores são a **hipótese de indução**, e essa redução é o *passo de indução*.

Às vezes a indução é mais complicada: uma maneira de provar a desigualdade das médias é mostrar $P(2)$, $P(2)$ e $P(n) \implies P(2n)$ e $P(n) \implies P(n-1)$. Se você nunca fez isso, tente mais tarde!

Mas as coisas não são tão simples assim. Muitas vezes gastamos algum tempo para elaborar $P(n)$ e entender como se faz as etapas da indução. Uma tentativa de resumo é:

Pensando indutivamente

1. Sua afirmação é do tipo "para todo"?

2. Identifique a **hipótese de indução** $P(n)$, e o n (a típica "indução em n"). Por exemplo, para provar a desigualdade das médias por indução, normalmente n é a quantidade de números nas médias. Sendo mais específico, $P(n)$ é "$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ para todos reais não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e n inteiro positivo."

3. Estude casos pequenos ($n = 1, 2, 3, 4$). A afirmação é verdadeira? Esses são a **base de indução**.

4. Tente reduzir um caso relativamente pequeno ($n = 5$, por exemplo?) a um caso anterior. Sendo um pouco (mas não muito) mais formal, como $P(5)$ decorre de $P(1), P(2), P(3), P(4)$? Essa parte é um rascunho do **passo de indução**.

5. A partir do passo anterior, faça um rascunho do caso geral para entender de verdade qual é a hipótese de indução $Q(n)$ que você quer realmente provar (veremos mais tarde que nem sempre provamos só o que queremos; talvez provamos mais do que isso).

6. Determine e prove a base de indução.

7. Prove $Q(n)$ a partir de $Q(n-1), Q(n-2), \ldots, Q(n_0)$, em que n_0 é o menor número da base de indução.

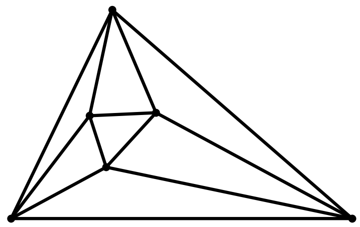
2.1 Reduzindo a casos anteriores

O primeiro princípio em indução é **sempre reduzir o problema a algum caso anterior**. Por exemplo, tentamos reduzir o caso n para algum caso menor.

Exemplo 5. Considere n pontos no interior de um triângulo de modo que não há três pontos colineares. Prove que ao dividir o triângulo em triângulos menores com vértices nos vértices do triângulo original e os n pontos, obtemos sempre $2n + 1$ triângulos.

Solução (errada). Fazemos indução em n. O problema é obviamente verdadeiro para $n = 0$. Agora suponha que a afirmação é verdadeira para n pontos e considere um ponto a mais. Ele está no interior de um triângulo, logo cada ponto a mais adiciona mais dois triângulos. Como, pela hipótese de indução, há $2n + 1$ triângulos com n pontos, com o ponto a mais há $2n + 1 + 2 = 2(n + 1) + 1$ triângulos, e o resultado segue por indução. □

Essa solução está errada pois tenta gerar todos os casos colocando pontos no interior de triângulos. Em particular, ele supõe que existe um ponto no interior ligado a exatamente 3 outros pontos (no interior ou não), o que não é verdade; veja a figura a seguir:



O problema é que tentamos ligar os pontos um por um, ligando à medida que colocamos os pontos. Podemos colocar os três pontos no interior do triângulo e depois decidir as arestas, como fizemos no exemplo anterior. Para consertar, o melhor é *não se importar com como os triângulos são gerados.* Para fazer isso, *tiramos um ponto* e vemos o que pode aparecer.

Solução. Fazemos indução em n. O problema é obviamente verdadeiro para $n = 0$. Agora considere $n > 0$, suponha que o resultado é válido para menos pontos. Tome um ponto qualquer e exclua. Ele estava no interior de um k-ágono, e perdemos k triângulos. Também sabemos que um k-ágono é sempre triangulado em $k - 2$ triângulos (isso é conhecido, mas não muito trivial de provar se o polígono pode não ser convexo). Temos agora $n - 1$ pontos; pela hipótese de indução, os $n - 1$ pontos triangulam em $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ triângulos, $k - 2$ dos quais são a triangulação do k-ágono. Então a nossa triangulação inicial tinha $2n - 1 - (k - 2)$ triângulos mais os k que tínhamos excluído, dando um total de $2n - 1 - k + 2 + k = 2n + 1$ triângulos, o que conclui nossa indução. □

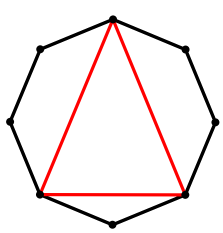
Outra vantagem de reduzir a casos anteriores é que *podemos escolher como fazer isso.*

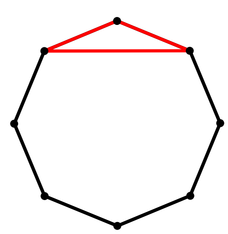
Exemplo 6. (IMO 2006/2) Seja P um polígono regular de 2006 lados. Uma diagonal é chamada *boa* quando suas extremidades dividem os lados de P em dois conjuntos, cada um com uma quantidade ímpar de elementos. Os lados de P também são considerados bons.

Suponha que P tenha sido dividido em triângulos por 2003 diagonais, sendo que não há duas delas se cortando em algum ponto interior de P. Encontre a quantidade máxima de triângulos isósceles que tem dois lados bons que pode aparecer nessa configuração.

Rascunho. Para variar, vale a pena fazer uns casos pequenos. Trocando 2016 por n, e considerando que diagonais boas só fazem sentido para n par, estudamos casos pequenos para n par. Vamos chamar triângulos isósceles com dois lados bons *bombons.*

- Para $n = 4$, não tem muito o que fazer, e obtemos 2.
- Para $n = 6$, fazer um triângulo equilátero no meio nos dá 3 bombons dos possíveis 4 triângulos. Como os únicos triângulos bombons possíveis são os dos três vértices consecutivos, a resposta é 3 mesmo.
- O caso $n = 8$ parece complicado, mas não é. Só há dois tipos de bombons: os que dividem os lados em $3, 3, 2$ e os com três lados consecutivos.

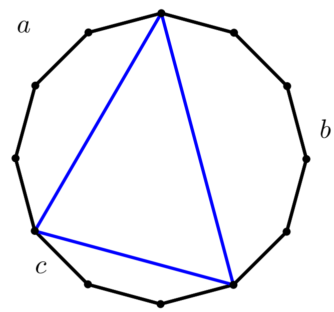




Quando temos um bombom do tipo $3, 3, 2$, no máximo um triângulo é bombom em cada uma das três regiões que sobram, dando um máximo de 4; se não temos, só temos bombons com vértices consecutivos, que são no máximo 4 também. É fácil ver que 4 é possível, então o valor para $n = 8$ é 4.

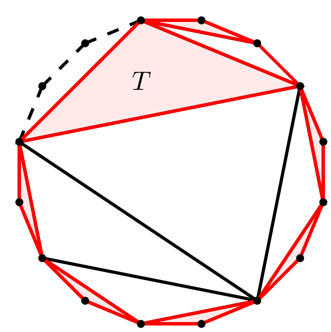
Para $n = 4$, temos resposta 2; para $n = 6$, 3; para $n = 8$, 4. Parece então que a resposta é $n/2$; no nosso problema, seria 1003.

A ideia de tomar um triângulo e pensar nas três regiões pareceu ajudar bastante no caso $n = 8$. Vamos tentar adaptá-la para o caso geral. Tomemos um dos triângulos que dividem o 2006-ágono em três regiões com a, b, c lados, com $a + b + c = 2006$. Parece interessante tentar provar que as regiões têm essencialmente no máximo $a/2$, $b/2$, $c/2$ bombons (sem pensar muito nos detalhes por enquanto). Como as regiões podem ter quantidades grandes de lados, indução nessas regiões parece ser promissor.



De fato, indução parece funcionar bem: considere a diagonal de uma dessas regiões, e o triângulo T que usa essa diagonal. Ele divide essa região em (no máximo) duas regiões, além do próprio T. Aí, por indução, cada região tem no máximo a metade de bombons, e a soma dá no máximo a metade...

...a não ser que o próprio triângulo T seja bombom também. Até agora, não usamos a paridade do número de lados; a hora é agora. Se T é bombom, tem dois lados bons; se esses são as diagonais que delimitam as sub-regiões em quantidades x e y temos no máximo $\frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + 1 = \frac{x+y}{2}$ bombons, e acabou. Mas isso nem sempre acontece. Parece que a indução não dá certo; aliás, dá para montar um exemplo que tem mais da metade de bombons: a região a seguir tem 13 lados e $7 > 13/2$ bombons.



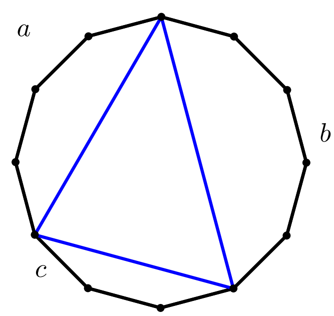
O problema é que a diagonal da região é boa. Como evitar isso? Uma maneira é fazer com que a diagonal da região seja a maior distância entre dois pontos, de modo que não seja possível que haja triângulo isósceles com essa diagonal como um dos lados iguais, já que só tem uma distância igual a ela. Para tanto, basta a região não conter o centro do polígono, e a indução acima funciona. Fazemos isso escolhendo o triângulo que tem o centro do polígono.

Solução. Dada uma triangulação, considere o triângulo Δ que contém o centro O do polígono em seu interior ou perímetro. Esse triângulo divide o polígono em no máximo quatro regiões, incluindo o próprio triângulo. Cada uma das outras três regiões tem como lados uma diagonal e vários lados consecutivos, e além disso não contêm O em seu interior, de modo que a diagonal é a única distância máxima entre vértices da região.

A partir de agora, chamaremos de *região* todo polígono que tem como lados uma diagonal e lados consecutivos, sem O em seu interior. Também chame um triângulo isósceles com dois lados bons de *bombons*. Provaremos, por indução em m, que se uma região tem uma diagonal e m lados então sua triangulação tem no máximo $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ bombons.

Se $m = 1$ ou $m = 2$ temos $0 = \lfloor 1/2 \rfloor$ e $1 = \lfloor 2/2 \rfloor$ bombons no máximo, respectivamente. Suponha agora que a região tem $m > 2$ lados e uma diagonal. Seja T o triângulo que tem a diagonal como um dos lados. O triângulo T divide a região em T e no máximo outras duas regiões, que contêm x e $m - x$ lados, respectivamente (em que x pode ser 1 caso só tenhamos uma outra região). Pela hipótese de indução, temos no máximo $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-x}{2} \rfloor \le \frac{x}{2} + \frac{m-x}{2} = \frac{m}{2}$ bombons. Se T não é bombom, o resultado segue; se T é bombom, então os lados iguais não podem conter a diagonal da região, pois ela é a única distância máxima, e aí x e $m - x$ precisam ser ambos ímpares. Logo temos no máximo $1 + \frac{x-1}{2} + \frac{m-x-1}{2} = \frac{m}{2}$ bombons, e o resultado segue por indução.

Sejam a, b, c as quantidade de lados nas regiões definidas por Δ; temos $a + b + c = 2006$. Assim, se Δ não é bombom, temos no máximo $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 1003$ bombons. Se Δ é bombom, dois dos números a, b, c, digamos a e b, são ímpares (e iguais), e temos no máximo $\frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} + \frac{c}{2} + 1 = 1003$ bombons também.



Um exemplo é tomar os 1003 triângulos com dois lados consecutivos e dividir o 1003-ágono regular que sobra arbitrariamente. Logo a resposta é 1003. □

O próximo exemplo mostra como a ideia poder decidir o caso anterior muda até o modo de pensar indutivamente.

Exemplo 7. Considere um grafo G com todos os vértices pintados de branco. Uma operação consiste em escolher um vértice e trocar a cor dele e de todos os seus vizinhos de branco para preto ou de preto para branco. Prove que é possível deixar todos os vértices pretos após uma quantidade finita de operações.

Solução. Indução sobre a quantidade n de vértices. Se $n = 1$, o resultado é imediato. Agora suponha que $n > 1$ e que o resultado é válido para quantidades menores de vértices. Separe um vértice v e aplique o procedimento que deixa todos os demais $n - 1$ vértices pretos, que existe pela hipótese de indução. Se v ficar preto após esse procedimento (ou seja, uma quantidade ímpar de seus vizinhos for escolhida), o problema acabou. Então suponha que tal procedimento muda as cores de todos os vértices, exceto v.

Na verdade, podemos supor isso para todo procedimento que torna quaisquer $n - 1$ vértices pretos, pois caso contrário é só escolher algum vértice que fica preto após usarmos o procedimento que torna todos os outros vértices pretos.

Vamos introduzir um pouco de notação agora. Numere os vértices de v_1 a v_n, e seja P_i a sequência de operações que tornam todos os vértices pretos, exceto v_i. O que acontece se aplicamos todos os procedimentos P_i? Todos os vértices são mudados $n-1$ vezes (todas menos quando usamos o procedimento que não o muda). Assim, se n é par, o problema também acabou. Temos então que n é ímpar.

Estamos então na seguinte situação: n é ímpar e todos os procedimentos P_i mudam todos os vértices exceto v_i. Por incrível que pareça, esses dois fatos terminam o problema. Como n é ímpar, existe um vértice com grau par (caso contrário, a soma de todos os graus seria ímpar, o que não é possível pois a soma dos graus é o dobro do número de arestas). Suponha sem perdas que v_1 é esse vértice e que $v_2, \ldots, v_{2k+1}$ são os seus vizinhos. Sobram outros $n - 2k - 1$ vértices, uma quantidade par. Execute P_i para $i = 2k + 2$ até $i = n$; eles mudam os vértices v_i, $1 \le i \le 2k + 1$ um total de $n - 2k - 1$ vezes, ou seja, eles continuam brancos, e os outros vértices $n - 2k - 2$ vezes (ímpar), ou seja, mudam todos os vértices v_i, $2k + 2 \le i \le n$, para preto. Basta agora escolher v_1, que muda todos os vértices de v_1 a v_{2k+1} mudam para preto, e a indução está terminada. □

2.2 Fortalecendo hipótese de indução

Às vezes, ao tentar provar algo, podemos notar que é mais fácil mostrar uma versão mais forte do problema. Parece estranho, mas acontece.

Vamos começar com um clássico.

Exemplo 8. Considere um grafo planar conexo com V vértices e A arestas. Ao desenharmos o grafo no plano, obtemos várias regiões denominadas *faces*. Sendo F a quantidade de faces, mostre que $V-A+F=2$.

Solução (Usando técnicas de grafos). Indução na quantidade de arestas. Se o grafo é uma árvore, tem $V-1$ arestas e uma face. Nesse caso, $V-A+F=V-(V-1)+1=2$. Caso contrário, admite um ciclo; escolha um ciclo sem cordas, ou seja, que é a fronteira de uma face.

Tome uma aresta vw do ciclo e retire; mostremos que isso não desconecta o grafo. Considere um caminho que contém vw. Como podemos acessar qualquer vértice do ciclo, podemos supor que o caminho intercepta o ciclo em arestas consecutivas, passando por v antes de w. Seja $v_1v_2\ldots vw\ldots u_1\ldots u_k$ a interseção do caminho com o ciclo. Tome como caminho alternativo o complementar do ciclo, começando por v_1 e terminando em u_k. Além disso, a aresta abre a face, unindo-a com outra face. Com isso, obtemos um grafo planar conexo com uma aresta a menos e uma face a menos. Pela hipótese de indução $V-(A-1)+(F-1)=2 \iff V-A+F=2$ e o resultado segue por indução. □

A solução acima não está ruim; ela é correta. Mas ela depende do fato de árvores com n vértices terem $n-1$ arestas e, enquanto esse fato pode ser usado em problemas de olimpíada (se bem que $V-A+F=2$ também pode), para provar em geral precisamos de outra indução. A próxima solução prova algo mais geral sem depender de árvores.

Solução (Generalizando). Provaremos que, em qualquer grafo planar com c componentes conexas com V vértices, A arestas e F faces, $V-A+F=c+1$; par grafos conexos, $c=1$. Faremos indução novamente sobre a quantidade de arestas. Se $A=0$, temos $c=V$ e $F=1$, e $V-A+F=c-0+1=c+1$.

Agora suponha que o grafo tenha alguma aresta e retire uma aresta vw qualquer do grafo. Se essa vw delimita duas faces, perdemos uma face e o número de componentes conexas se mantém, e pela hipótese de indução $V-(A-1)+(F-1)=c+1 \iff V-A+F=2$. Se vw não delimita duas faces, não perdemos faces, mas desconectamos v e w nessa componente conexa pois se existe outro caminho entre v e w, vw faz parte de um ciclo, e portanto delimita uma face, e vw separa o interior e o exterior dessa face, que são faces diferentes. Logo, pela hipótese de indução, $V-(A-1)+F=(c-1)+1 \iff V-A+F=c+1$, e o resultado segue por indução. □

Você pode estar se perguntando por que os problemas já não são propostos nas suas versões mais fortes. Há dois motivos principais:

- A versão mais forte é menos elegante e/ou mais difícil de explicar.
- Não se sabia da existência da versão mais forte, o que acontece em pesquisa, por exemplo.

Exemplo 9. Em teoria dos grafos, temos o conceito de *coloração por lista*: cada vértice tem uma lista de cores que podem colori-lo (as listas podem ser diferentes). Uma pintura é válida quando cada vértice é pintado de uma cor de sua lista dois vértices ligados por uma aresta têm sempre cores diferentes.

Um grafo é *k-escolhível* quando tem a seguinte propriedade: toda designação de listas de k cores para os vértices admite uma pintura válida. Prove que todo grafo planar é 5-escolhível.

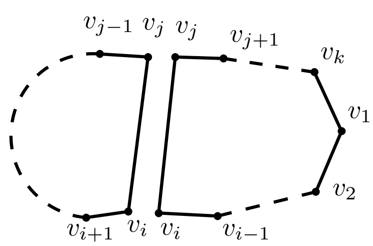
Esse problema foi proposto por Vizing em 1975 e independentemente mais tarde em 1979 por Erdős, Rubin e Taylor. Na verdade o primeiro exemplo de um grafo planar que não é 4-escolhível só apareceu em 1993 e foi descoberto por Margit Voigt (com 238 vértices). Thomassen resolveu o problema em 1994 com uma indução bem bacana que mostraremos a seguir.

Solução (Thomassen). Uma ideia usual em problemas de coloração é usar um caso particular que na verdade generaliza o problema: colocar mais arestas no grafo até termos só triângulos e talvez um ciclo delimitando a face exterior. Isso é uma *quasi-triangulação* (sim, "quasi" com 'i'). Resolver o problema nesse caso implica o caso geral, pois se o problema vale para a quasi-triangulação basta retirar as arestas, e a pintura continua válida.

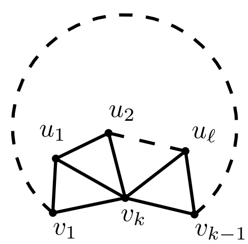
A ideia genial de Thomassen foi diminuir a quantidade de cores da face exterior (a "borda" do grafo) porque ao tirar um vértice da borda e colocarmos de volta podemos usar as cores que sobram. E podemos, é claro, supor que duas cores já estão determinadas, na borda. Com isso, chegamos ao seguinte teorema, que generaliza o problema, mas é um pouco mais complicada e menos elegante:

Teorema 1 (Thomassen). *Seja G uma quasi-triangulação com borda $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$. Suponha que v_1 está pintada com a cor 1 e v_2 está pintada com a cor 2, e que os outros vértices da borda têm listas de três cores, enquanto os vértices do interior do grafo têm listas de cinco cores. Então a pintura pode ser completada de modo que vértices vizinhos têm cores diferentes, e cada vértice está pintada com uma cor de sua lista.*

Vamos provar o teorema por indução na quantidade n de vértices. Se $n = 3$, o problema é imediato, pois basta pintar v_3 e temos três opções para v_3; uma delas vai ser diferente de 1 e 2. Agora suponha que $n \geq 4$.



Se C tem uma corda v_iv_j, $i < j$, com $j = p + 1$ se for necessário, aplique a hipótese de indução em $v_1v_2 \dots v_iv_j \dots v_kv_1$ e seu interior. Isso fixa as cores de v_i e v_j. Depois aplique a hipótese de indução em $v_jv_iv_{i+1} \dots v_{j-1}v_j$, usando v_i e v_j como as cores fixadas. Com isso, a pintura está terminada.



Sobra o caso em que C não tem corda. Retire o vértice v_k, e sejam $v_1, u_1, u_2, \dots, u_\ell, v_{k-1}$, nessa ordem, seus vizinhos. Esses vizinhos fazem parte da nova borda $v_1v_2 \dots v_{k-1}u_\ell \dots u_2u_1v_1$. Vamos aplicar a hipótese de indução nesse novo grafo com as seguintes modificações: escolha duas cores c_1 e c_2 diferentes de 1 da lista de v_k (existem pois v_k tem três cores). Tiramos c_1 e c_2 da lista de u_i se elas estiverem nas listas para todo i, dando três cores para u_i (se for o caso, retire cores arbitrárias de u_i para só sobrarem três cores). Aplicando a hipótese de indução, podemos pintar u_k de c_1 ou c_2, dependendo da cor de v_{k-1}; note que não temos problemas com u_i pois c_1 e c_2 não estão nas listas (modificadas) de u_k. Isso conclui a demonstração. $\square$

3 Algoritmos

Muitas vezes se pergunta "é possível fazer algo?" Se a resposta é sim, muitas vezes mostramos como fazer, usando um *algoritmo* (nem sempre se faz isso; existem demonstrações indiretas). Em geral, quando trabalhamos com algoritmos, devemos nos preocupar com dois aspectos:

- o algoritmo funciona em todos os casos;
- o algoritmo termina.

Às vezes indução finita também gera um algoritmo: veja que nosso último exemplo mostra como fazer a pintura, dada as listas de cores de cada vértice.

3.1 Otimizando localmente: o algoritmo guloso

O algoritmo guloso escolhe a "melhor" solução a cada passo, e pode ser útil para encontrar soluções para algum problema.

Exemplo 10. (IMO 2003/1) Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Demonstre que existem números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

são disjuntos dois a dois.

Solução. Primeiro, vamos entender o que o enunciado quer dizer: se $y \in A_i \cap A_j$ então $y = a + t_i = b + t_j$ para alguns $a, b \in A$. Então queremos ter $t_i - t_j \neq b - a$ para todos i, j e todos $a, b \in A$.

Vamos fazer o algoritmo guloso mais simples possível: escolhamos $t_1 = 1$ e, para cada $j > 1$, escolhemos o menor t_j possível. Não queremos ter $t_j = t_i + b - a$ para t_i escolhido anteriormente, de modo que bloqueamos $(j-1) \cdot 101 \cdot 100 + (j-1)$ valores (os valores proibidos por (t_i, b, a) e os $j - 1$ t_i's anteriores). Assim, podemos fazer escolhas até que

$$(j-1) \cdot 101 \cdot 100 + (j-1) \le 1000000 \iff j \le 1 + \frac{1000000}{101 \cdot 100 + 1} \iff j \le 100,$$

ou seja, conseguimos os 100 números. □

Comentário. Na verdade dá para fazer melhor, pois como $t_j > t_i$ para todo i anterior, só escolhemos $b > a$, o que pode ser feito de $\binom{101}{2} = 5050$ maneiras. Nesse caso,

$$(j-1) \cdot 5050 + (j-1) \le 1000000 \iff j \le 1 + \frac{1000000}{5051} \iff j \le 198,$$

e dá para conseguir 198 números!

Comentário. Esse problema é brasileiro! Ele foi proposto pelo Carlos Gustavo Moreira, o Gugu.

Exemplo 11. Um *DS-set* é um conjunto finito de inteiros positivos em que cada um de seus elementos divide a soma de todos os demais. Prove que todo conjunto finito de inteiros está contido em um DS-set.

Rascunho. Note que, como $x \mid y \iff x \mid x + y$, um DS-set tem a seguinte propriedade: cada elemento divide a soma de todos os seus elementos, que é mais fácil de controlar.

Antes de atacar o problema, vamos pensar em como construir DS-sets de tamanho arbitrário. Isso é relativamente fácil: começando com o DS-set $\{1, 2, 3\}$ é só colocar a soma: $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 6, 12\}$, e em geral, $\{1, 2\} \cup \{3 \cdot 2^i : 0 \le i \le n\}$ para um DS-set de tamanho $n + 3$. A soma dos elementos é $3 \cdot 2^{n+1}$, que é múltiplo de todos os elementos.

Podemos atacar o caso particular $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ que resolvemos o problema, já que todo conjunto de inteiros positivos está contido em um conjunto dessa forma. A soma é $\frac{k(k+1)}{2}$, mas isso não é muito informativo. É mais importante fazer a soma ser um múltiplo de todos os números de 1 a k, ou seja, de $\text{mmc}(1, 2, \ldots, k)$. Se usarmos $k!$ no lugar já dá certo, então podemos colocar $k! - \frac{k(k+1)}{2}$ no conjunto. Mas aí temos que fazer a nova soma ser múltipla de $k! - \frac{k(k+1)}{2}$ também. Isso na verdade não é ruim: trocamos k números por um só. OK, então fazemos a soma ser $k!\left(k! - \frac{k(k+1)}{2}\right)$. Parece que o número $k! - \frac{k(k+1)}{2}$ vai ficar conosco por um tempo; seja N esse número então. Temos o conjunto $\{1, 2, \ldots, k, N, (N-1) \cdot k!\}$ por enquanto.

Vamos continuar a "ajeitar" a soma para ser múltipla do máximo, mantendo os outros.

$\max(X)$	$(N-1)\cdot k!$	$N(N-2)\cdot k!$	$N(N-1)(N-3)k!$	$N(N-1)(N-2)(N-4)k!$
$s(X)$	$N\cdot k!$	$N(N-1)k!$	$N(N-1)(N-2)k!$	$N(N-1)(N-2)(N-3)k!$

Percebeu o que aconteceu? Estamos caminhando para ter uma soma igual a $N!\,k!$. Assim, podemos montar o DS-set

$\{1,2,\dots,k,N,(N-1)k!,N(N-2)k!,N(N-1)(N-3)k!,\dots,N(N-1)\dots4\cdot2\cdot k!,N(N-1)\dots4\cdot3\cdot k!\}$,

sendo $N=k!-\frac{k(k+1)}{2}$. Agora é só uma questão de álgebra provar que a soma é $N!\,k!$, o que termina o problema.

Agora podemos escrever uma solução. Note que não usamos muito a estrutura de $\{1,2,\dots,k\}$, de modo que vamos dispensar essa particularização, trocando $k(k+1)/2$ por $s(X)$ e k por $\operatorname{mmc} X$. Para facilitar mais ainda, note por exemplo que $N(N-1)(N-3)=N(N-1)(N-2)-N(N-1)=\frac{N!}{(N-3)!}-\frac{N!}{(N-2)!}$, $N(N-1)(N-2)(N-4)=N(N-1)(N-2)(N-3)-N(N-1)(N-2)=\frac{N!}{(N-4)!}-\frac{N!}{(N-3)!}$, e assim por diante (de fato, estávamos fazendo essas contas sem precisar!)

Solução. Note que, como $x\mid y \iff x\mid x+y$, um conjunto é DS-set se, e somente se, cada elemento divide a soma de todos os seus elementos.

Seja X um conjunto finito de inteiros. Sendo S a soma dos elementos de X, $M=t\operatorname{mmc} X$ e $N=M-S$, sendo t escolhido de modo que $N>0$, vamos provar que o conjunto

$$D=X\cup\{N\}\cup\left\{M\left(\frac{N!}{k!}-\frac{N!}{(k+1)!}\right),1\le k\le N-1\right\}$$

é um DS-set. Como esse conjunto contém X, isso termina o problema.

A soma dos elementos de D teslescopa e é igual a

$$S+N+\left(\frac{N!}{1!}-\frac{N!}{N!}\right)M=M+(N!-1)M=M\cdot N!,$$

que é múltiplo de $\operatorname{mmc} X$ e, portanto, de todo elemento de X, de N, e sendo

$$M\left(\frac{N!}{k!}-\frac{N!}{(k+1)!}\right)=\frac{M\cdot N!}{(k+1)!}(k+1-1)=\frac{M\cdot N!}{(k+1)!/k},$$

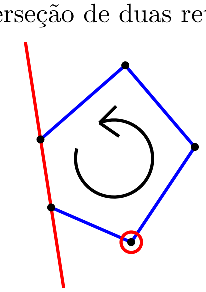
de cada um dos outros elementos também. □

Exemplo 12. (IMO 2014/6) Um conjunto de retas no plano está em *posição geral* se não há duas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto. Um conjunto de retas em posição geral corta o plano em regiões, algumas com área finita, chamadas *regiões finitas*. Prove que, para todo n suficientemente grande, em qualquer conjunto de n retas em posição geral é possível pintar de azul pelo menos $\sqrt{n}$ dessas retas, de modo que nenhuma das suas regiões finitas tenha uma fronteira completamente azul.

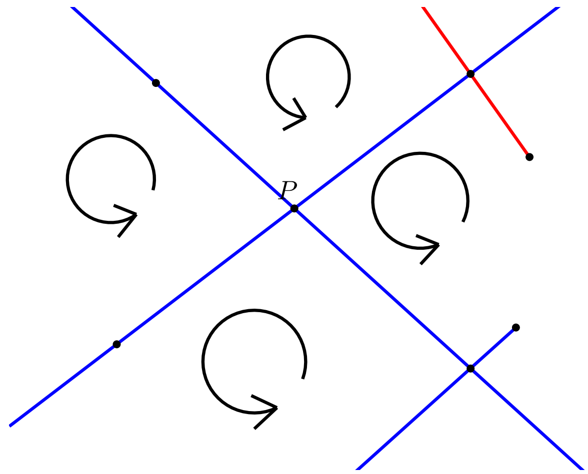
Nota: Para resultados em que $\sqrt{n}$ é substituído por $c\sqrt{n}$ serão atribuídos pontos conforme o valor da constante c.

Solução. Fazemos o seguinte algoritmo guloso: pintamos as retas de azul até não der mais, ou seja, até que qualquer reta que pintarmos deixa uma região finita com fronteira completamente azul. Suponha que pintamos k retas azuis.

Nessa situação, como queremos $\sqrt{n}$, deve ser importante pensar em pares de retas. Que tal pares de retas azuis? Vamos pensar nas retas não pintadas também. Fixe uma delas, ℓ: se a pintarmos de azul, alguma região fica com a fronteira azul. Associe a ℓ o próximo vértice nessa região, no sentido anti-horário. Note que esse ponto é a interseção de duas retas azuis.



Agora, cada interseção P de duas retas azuis está associada a no máximo duas retas não pintadas: considere as (no máximo) quatro regiões delimitadas por essas duas retas. Então se associamos uma reta vermelha a P, o vértice anterior é de uma reta azul, pois só h a uma reta vermelha nessa região. Isso impede a região anterior de associar uma reta vermelha a P, pois essa reta azul tem P como próximo vértice no sentido anti-horário. Logo se uma reta não azul está associada a P, a região vizinha no sentido horário não tem uma reta associada a P.



Assim, como há $\binom{k}{2}$ interseções de retas azuis e $n-k$ retas não azuis, a quantidade de associações, que é $n-k$ (uma para cada reta não pintada) é menor ou igual ao dobro de interseções:

$$n-k \leq 2\binom{k}{2} \iff n-k \leq k^2-k \iff k \geq \sqrt{n}.$$

□

3.2 Global vs. local: guloso nem sempre é o melhor

O algoritmo guloso é bom para encontrar alguma solução para um problema (embora nem sempre ele a encontre). Todavia, alguns problemas pedem a solução ótima para algum problema (número mínimo ou máximo de algo), e aí nem sempre otimizar localmente serve para otimizar globalmente.

De fato, os algoritmos acima não são necessariamente os melhores; no exemplo do DS-set, o algoritmo não necessariamente acha o menor DS-set que contém X (e nem precisa); e sabe-se de métodos que garantem $c\sqrt{n\log n}$ retas no problema da IMO 2014.

Exemplo 13. Dado um grafo G em que cada aresta tem um número real positivo que representa a distância entre os dois vértices, encontre um algoritmo que encontra o menor caminho entre dois vértices dados de G.

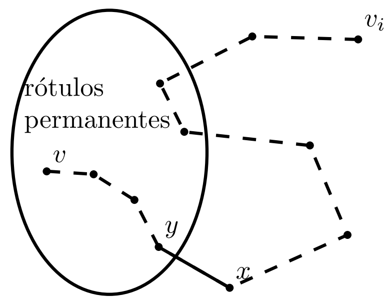
Rascunho. O algoritmo guloso (escolher o vértice mais próximo em cada momento) obviamente não dá o menor caminho nesse problema: considere um ciclo em que todas as distâncias são iguais a 1, exceto uma distância, entre v e w, que é igual a 1,001. A menor distância entre v e w é obviamente 1,001, mas o algoritmo guloso toma o resto do ciclo.

Precisamos então de um algoritmo melhor. Como considerar caminhos alternativos? A ideia vai ser encontrar a menor distância entre uma origem e *qualquer* outro vértice. Ou seja, *pensamos globalmente.*

Solução (Algoritmo de Dijkstra). Associe a cada vértice um *rótulo* que representa a menor distância à origem v. O rótulo é *temporário* quando é a menor distância até então, e é *permanente* quando sabemos que é a menor distância possível.

O algoritmo de Dijkstra funciona da seguinte forma: iniciamos com todos com rótulos temporários ∞ exceto a origem, que tem rótulo temporário 0. Escolhemos o rótulo temporário com o menor valor e o promovemos para permanente, enquanto também anotamos seu predecessor no caminho. Agora que sabemos a distância a esse vértice w, tomamos seus vizinhos e atualizamos os rótulos temporários deles, adotando o menor entre o rótulo atual e a soma do rótulo de w com a distância do rótulo a esse vértice; o predecessor é também atualizado de acordo. O algoritmo termina quando todos os rótulos forem permanentes, o que ocorre após $|V| - 1$ passos.

Vamos provar que esse algoritmo encontra a menor distância de v a cada um dos demais vértices. A primeira observação é que se um caminho C é ótimo, então qualquer um de seus subcaminhos também é; se não for, troque esse pedaço do caminho pelo pedaço ótimo, tire arestas desnecessárias (se aparecer um ciclo ou circuito) e obtenha um caminho C' melhor do que C, absurdo.



Ordene os vértices diferentes de v de v_1 a v_n na ordem em que seus rótulos são promovidos a permanentes. Suponha que a distância $f(v, v_i)$ encontrada pelo algoritmo de Dijkstra é maior do que a distância ótima $d(v, v_i)$, sendo i o menor índice. Considere o momento imediatamente anterior a tornar o rótulo de v_i permanente. Seja x o primeiro vértice do caminho ótimo de v para v_i que não tem rótulo permanente (ele existe, podendo ser, por exemplo, o próprio v_i). Agora seja y o vértice anterior a x no caminho ótimo. Então, pela observação do parágrafo anterior, $f(v, x) \leq f(v, y) + d(y, x) = d(v, y) + d(y, x)$. Como estamos para incluir v_i e x não tem rótulo permanente, $f(v, v_i) \leq f(v, x)$. Assim,

$$f(v, v_i) \leq f(v, x) = d(v, y) + d(y, x) \leq d(v, y) + d(y, x) + d(x, v_i) = d(v, v_i),$$

absurdo, e o algoritmo está provado. $\square$

Exemplo 14. (OBM 2016, modificado) Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 4 ou 5?

Rascunho. O algoritmo guloso (escolher o menor número disponível) nos dá

$$1, 3, 8, 10, 15, 17, \ldots$$

que são os números congruentes a 1 ou 3 módulo 7. São $2/7$ dos números.

Todavia, escolher os múltiplos de 3 nos dá diferenças todas múltiplas de 3, e temos $1/3 > 2/7$ dos números. O algoritmo guloso não funciona.

Solução. Provemos que a resposta é $\frac{2016}{3} = 672$. Um exemplo são os múltiplos de 3. As diferenças são todas múltiplas de 3 e, portanto, todas diferentes de 1, 4 e 5.

Mostraremos agora que todo conjunto válido (ou seja, sem diferenças de 1, 4 ou 5) contém no máximo 2 de cada 6 números consecutivos: como não podemos ter números consecutivos, se escolhermos três números eles devem ser x, $x + 2$, $x + 4$, o que não é possível pois $(x + 4) - x = 4$, x, $x + 2$, $x + 5$, o que não é possível pois $(x + 5) - x = 5$, ou x, $x + 3$, $x + 5$, o que não é possível pois $(x + 5) - x = 5$. Logo no máximo dois entre seis consecutivos são escolhidos.

Considere os conjuntos da forma $\{6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, 6k + 6\}$, $0 \leq k \leq \frac{2016}{6} - 1$, que particionam $\{1, 2, \ldots, 2016\}$. Pelo parágrafo anterior, podemos escolher no máximo 2 de cada um dos conjuntos, e a quantidade total é no máximo $2 \cdot \frac{2016}{6} = 672$. $\square$

3.3 Conclusão: quando usar o algoritmo guloso?

Olhando os exemplos anteriores, a conclusão que tiramos é

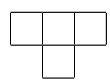
- Se você quer encontrar um exemplo para resolver um problema, o algoritmo guloso pode resolver.
- Se você quer otimizar algo, o algoritmo guloso pode encontrar a solução ótima, mas nem sempre o faz. De qualquer forma, voc6e precisa mostrar que sua solução é ótima; o algoritmo guloso por si só não faz isso.

4 Problemas

1. (IMO 2013/1) Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n, existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

2. (Cone Sul 2017/3) Seja n um inteiro positivo. Tem-se um tabuleiro quadriculado $4 \times 4n$ dividido em casinhas 1×1, e $4n$ peças como a que se mostra na figura abaixo. Determinar de quantas maneiras se pode cobrir totalmente o tabuleiro com essas peças.



3. (IMO 2011/4) Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.

   Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

4. (Banco IMO 2002/C3) Uma sequência de n inteiros positivos, não necessariamente distintos, é *cheia* quando tem as seguintes propriedades: para $k \geq 2$, se k aparece então $k-1$ também aparece, e $k-1$ aparece pela primeira vez antes de k aparecer pela última vez. Calcule, em função de n, a quantidade de sequências cheias.

5. (Cone Sul 2001/6) Seja g uma função definida para todo inteiro positivo n, que satisfaz

   (i) $g(1) = 1$;

   (ii) $g(n+1) = g(n) + 1$ ou $g(n+1) = g(n) - 1$ para todo $n \geq 1$;

   (iii) $g(3n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$;

   (iv) $g(k) = 2001$ para algum inteiro positivo k.

   Ache o menor valor possível de k entre todas as funções g que cumprem as condições anteriores e demonstre que é o menor.

6. (Cone Sul 2003/2) Considere a sequência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

   - $a_1 = 1$;
   - $a_2 = 3$;

- $a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n + 1$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

7. (Cone Sul 2004/6) Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções $\leftarrow$ e $\uparrow$.

   Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p.

   Em quantos caminhos a área é um múltiplo de p?

8. (Cone Sul 1998/6) O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

   (i) cada linha passe exatamente por três paradas;

   (ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;

   (iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

   Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

9. Prove que um n-ágono (não necessariamente convexo, mas necessariamente sem entrelaçamentos) é sempre triangulado em $n - 2$ triângulos.

10. A *sequência de Knuth* é definida por $K_0 = 1$ e $K_{n+1} = 1 + \min\{2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}\}$ para $n \geq 0$. Prove que $K_n \geq n$ para $n \geq 0$.

11. (Ciclos de deBruijn) Prove que é possível colocar em círculo 2^n números, cada um deles igual a 0 ou 1, de modo que, ao lermos todas as 2^n sequências de n números consecutivos (no sentido horário) obtemos todas as sequências binárias possíveis de tamanho n. Para $n = 3$, um exemplo é 10001110.

12. (Cone Sul 1996/3) Uma loja vende garrafas com as seguintes capacidades: 1 litro, 2 litros, ..., 1996 litros. Os preços das garrafas satisfazem as duas condições a seguir:

    1. Duas garrafas têm o mesmo preço se e somente se suas capacidades m, n $(m > n)$ satisfazem $m - n = 1000$.
    2. Cada garrafa de m litros de capacidade $(1 \leq m \leq 1000)$ custa $1996 - m$ dólares.

    Achar todos os pares de garrafas de m e n litros tais que:

    (a) $m + n = 1996$;

    (b) o custo total do par seja o menor possível;

    (c) com o par se possa medir k litros, para todo k inteiro desde 1 até 1996.

    NOTA: As operações permitidas para medir são:

    i. Encher ou esvaziar qualquer das duas garrafas.

    ii. Passar líquido de uma garrafa para a outra.

    Ter-se-á conseguido medir k litros quando a quantidade de litros de uma garrafa mais a quantidade de litros da outra é igual a k.

13. (Cone Sul 1999/3) Há 1999 bolinhas em uma reta; algumas são vermelhas e as demais azuis (poderiam ser todas vermelhas ou todas azuis). Debaixo de cada bolinha escrevemos o número igual à soma da quantidade de bolinhas vermelhas à direita dela mais quantidade de bolinhas azuis à esquerda dela. Se, na sequência de números assim obtida, houver exatamente três números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes, quais podem ser estes três números?

14. (IMO 2016/6) Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

    (a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.

    (b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

15. (IMO 2014/5) Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

16. (IMO 2002/1) Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \leq x$ e $y' \leq y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abcissas todas diferentes, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas diferentes. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y.

17. (IMO 2007/3) Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.

    Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

18. (IMO 2019/3) Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

    > Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

    Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

19. (Cone Sul 2014/6) Dada um família F de subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$, uma jogada permitida é escolher dois conjuntos *disjuntos* A e B de F e agregar $A \cup B$ a F, mantendo A e B em F.

    Inicialmente, F tem exatamente todos os subconjuntos unitários de S. O objetivo é obter, mediante jogadas permitidas, que F tenha todos os subconjuntos de $n-1$ elementos de S.

    Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

    Observação: $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B, ou a ambos.

20. (TST Reino Unido) Prove que todo grafo planar pode ter suas arestas direcionadas de modo que o in-grau (número de arestas que entram) de cada vértice é menor ou igual a 3.