Casos particulares, indução e algoritmos
Soluções dos problemas

Carlos Shine

1 Sobre este documento

Não apresentaremos os rascunhos e casos particulares aqui. Eles ficam por sua conta, ou seja,

Pense nos problemas antes de ler as soluções!

Para ajudar, apresentaremos as soluções em páginas novas, para você não correr o risco de ler uma solução que não gostaria (começando com o problema 1! Por isso tanto espaço em branco a seguir.)

2 Use os links a seguir para ir para a solução do problema que quiser

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

3 Problemas e soluções

1. (IMO 2013/1) Demonstrar que, para qualquer par de inteiros positivos k e n, existem k inteiros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (não necessariamente distintos) tais que:

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

Solução. Indução em k. Para $k=1$, temos

$$1+\frac{2^1-1}{n}=1+\frac{1}{n},$$

e escolhemos $m_1=n$.

Para $k>1$, suponha que o resultado é válido para todo valor menor de k e todo n inteiro positivo. Então, se $n=2m$ é par temos

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\frac{2m+2^k-1}{2m}=\left(1+\frac{1}{2m+2^k-2}\right)\frac{2m+2^k-2}{2m}=\left(1+\frac{1}{2m+2^k}\right)\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{m}\right)$$

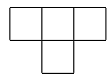
e aplicamos a hipótese de indução para $(k-1,m)$, escrevendo $1+\frac{2^{k-1}-1}{m}$ como produto de $k-1$ expressões do tipo $1+\frac{1}{m_i}$.

Se $n=2m-1$ é ímpar temos

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\frac{2m-1+2^k-1}{2m-1}=\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)\frac{2m+2^k-2}{2m}=\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{m}\right),$$

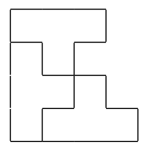
e novamente aplicamos a hipótese de indução para $(k-1,m)$, escrevendo $1+\frac{2^{k-1}-1}{m}$ como produto de $k-1$ expressões do tipo $1+\frac{1}{m_i}$. O resultado então segue. $\square$

2. (Cone Sul 2017/3) Seja n um inteiro positivo. Tem-se um tabuleiro quadriculado $4 \times 4n$ dividido em casinhas 1×1, e $4n$ peças como a que se mostra na figura abaixo. Determinar de quantas maneiras se pode cobrir totalmente o tabuleiro com essas peças.

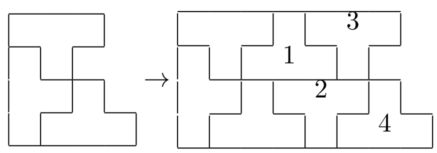


Solução. Resposta: $2 \cdot 3^{n-1}$.

Primeiro, considere a casa inferior esquerda do tabuleiro. Há duas maneiras de cobri-la, e isso força a posição de mais duas peças:



Aí temos exatamente três opções: fechar o retângulo (no caso inicial, quadrado) e começar de novo (duas opções, e colocamos mais três peças adicionais) ou colocar a peça 1, que força as outras três peças:



Note que voltamos à situação anterior, mas com uma dimensão horizontal quatro unidades menor. Continuando, temos sempre 3 opções, até o final, em que somos obrigados a fechar o retângulo, colocando a peça que falta.

Com isso, como repetimos o procedimento $n-1$ vezes, o número de maneiras de preencher o tabuleiro é $2 \cdot 3^{n-1}$. $\square$

3. (IMO 2011/4) Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.

   Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

   Solução. Resposta: $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

   Considere o menor peso (ou seja, o de massa 1). Se ele for o primeiro a ser colocado, ele deve ir ao prato esquerdo. Caso contrário, ele não faz diferença, já que os pesos são todos pares, e os pratos nunca se equilibram, pois caso contrário um número poderia ser escrito na base binária de duas maneiras diferentes (correspondentes aos pratos), o que não é possível. Assim, o peso de massa 1 tem $2n-1$ possibilidades (1 se for o primeiro, mais 2 para cada uma das outras $n-1$ posições na ordem dos pesos).

   Agora divida todos os demais pesos por 2 e repita o processo, ou seja, sendo a_n a quantidade pedida, $a_n = (2n-1)a_{n-1}$. Junto com $a_1 = 1$, temos $a_n = (2n-1)!!$. □

4. (Banco IMO 2002/C3) Uma sequência de n inteiros positivos, não necessariamente distintos, é *cheia* quando tem as seguintes propriedades: para $k \geq 2$, se k aparece então $k-1$ também aparece, e $k-1$ aparece pela primeira vez antes de k aparecer pela última vez. Calcule, em função de n, a quantidade de sequências cheias.

   Solução. Resposta: $n!$.

   Seja a_n a quantidade pedida. Note que toda sequência cheia tem que ter números de 1 a m para algum m. Assim, $a_1 = 1$.

   Agora mostremos que $a_n = n \cdot a_{n-1}$, mostrando uma associação 1 para n entre as sequências cheias de comprimento $n-1$ e as sequências cheias de comprimento n. Seja S_m o conjunto das sequências cheias de comprimento m. Construa n sequências de S_n a partir de uma sequência $s \in S_{n-1}$ inserindo em cada posição de s o maior número possível de modo que a nova sequência continue cheia. Por exemplo, $s = (1,2,2)$ gera

   $$(\mathbf{2},1,2,2), \quad (1,\mathbf{2},2,2), \quad (1,2,\mathbf{3},2), \quad (1,2,2,\mathbf{3}).$$

   Esse número x é a primeira ocorrência do maior valor na sequência: de fato, x é um dos máximos porque o máximo M de s já aparece pela última vez depois da primeira ocorrência de seu antecessor, e podemos fazer $x = M$. Agora, se x não é a primeira ocorrência do máximo M, existe uma cópia de M antes, e podemos fazer $x = M+1$, sendo a primeira cópia do novo máximo, que é $M+1$.

   Agora, esse procedimento é claramente reversível, ou seja, a partir de uma sequência cheia t de S_n podemos encontrar $s \in S_{n-1}$ e a posição onde inserimos o novo valor tirando a primeira ocorrência do máximo e observando sua posição. Logo a correspondência $(s, \text{posição}) \mapsto t$ é uma bijeção, e $a_n = n \cdot a_{n-1}$. Sendo $a_1 = 1$, $a_n = n!$. $\square$

5. (Cone Sul 2001/6) Seja g uma função definida para todo inteiro positivo n, que satisfaz

   (i) $g(1) = 1$;

   (ii) $g(n+1) = g(n) + 1$ ou $g(n+1) = g(n) - 1$ para todo $n \geq 1$;

   (iii) $g(3n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$;

   (iv) $g(k) = 2001$ para algum inteiro positivo k.

   Ache o menor valor possível de k entre todas as funções g que cumprem as condições anteriores e demonstre que é o menor.

   Solução. Queremos encontrar o menor valor de k tal que $g(k) = 2001$. Assim, seja a_n o menor valor tal que $g(a_n) = n$. Desta forma, devemos calcular a_{2001}.

   Temos $g(1) = 1$, logo $a_1 = 1$. Podemos tomar $g(2) = 2$, logo $a_2 = 2$. Observe que nesse caso $g(3) = g(1) = 1$ e $g(6) = g(2) = 2$. Podemos tomar $g(4) = 2$ e $g(5) = 3$, logo $a_3 = 5$.

   Considere $g(k)$ e $g(k+1)$. Temos $g(3k) = g(k)$ e $g(3k+3) = g(k+1)$. Assim, $g(3k+3) = g(3k)+1$ ou $g(3k+3) = g(3k) - 1$. Desta forma, $g(3k+1)$ e $g(3k+2)$ são no máximo iguais a $g(k)+1$ ou $g(k+1)+1$. Por exemplo, se $g(4) = 2$ e $g(5) = 3$, temos $g(12) = 2$ e $g(15) = 3$. Tomando $g(13) = 3$ e $g(14) = 4$, temos que $a_4 = 14$.

   Note que, como $g(k) \leq 2$ para $k \leq 4$, temos $g(k) \leq 3$ para $k \leq 12$.

   Assim, podemos encontrar a_{n+1} em função de a_n. Temos que $g(a_n - 1) = n - 1$ pois $g(a_n - 1) < n$ (se $g(a_n - 1) \geq n$, existiria $k < a_n$ tal que $g(k) = n$, o que contradiz a hipótese de a_n ser mínimo). Assim, $g(3(a_n - 1)) = n - 1$ e $g(3a_n) = n$. Para $k \leq a_n - 1$, temos $g(k) \leq n - 1$, logo $g(k) \leq n$ para $k \leq 3(a_n - 1)$. Podemos tomar $g(3a_n - 2) = n$ e $g(3a_n - 1) = n + 1$. Logo $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

   Note que temos "quase" uma progressão geométrica. Se somarmos um número x de cada lado, temos $a_{n+1} + x = 3a_n - 1 + x = 3\left(a_n + \frac{x-1}{3}\right)$. Se fizermos $x = \frac{x-1}{3} \iff x = -\frac{1}{2}$, temos $a_{n+1} - \frac{1}{2} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$. Sendo $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, temos $b_{n+1} = 3b_n$, ou seja , b_n é uma progressão geométrica de razão 3. Logo $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1}$. Como $b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, temos

   $$b_n = \frac{3^{n-1}}{2} \iff a_n - \frac{1}{2} = \frac{3^{n-1}}{2} \iff a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}.$$

   Para $n = 2001$, temos $a_{2001} = \frac{3^{2000}+1}{2}$. □

6. (Cone Sul 2003/2) Considere a sequência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

- $a_1 = 1$;
- $a_2 = 3$;
- $a_{n+2} = 2a_{n+1}a_n + 1$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

Solução. Temos, para $n \geq 2$,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_{n+1}a_n + 1 - (2a_n a_{n-1} + 1) = 2a_n(a_{n+1} - a_{n-1}).$$

Sendo $b_n = a_{n+1} - a_n$, temos $a_{n+1} - a_{n-1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1})$, de modo que

$$b_{n+1} = 2a_n(b_n + b_{n-1}).$$

Com isso, sendo $\nu_2(k)$ o expoente da maior potência de 2 que divide k (por exemplo, $\nu_2(12) = 2$ e $\nu(19) = 0$), queremos encontrar $\nu_2(a_{1006} - a_{4005}) = \nu_2(b_{4005})$. Temos a_n ímpar, logo

$$\nu_2(b_{n+1}) = 1 + \nu_2(b_n + b_{n-1}) \geq 1 + \min\{\nu_2(b_n), \nu_2(b_{n-1})\}, \qquad (*)$$

em que a igualdade ocorre quando $\nu_2(b_n) \neq \nu_2(b_{n-1})$, pois nesse caso, sendo k o mínimo desses dois expoentes, $b_n + b_{n-1} = 2^k(t + u)$, em que t é a parte ímpar de um deles e u é par, pois o outro número é divisível por uma potência de 2 maior. Com isso, podemos montar a seguinte tabela, em que calculamos $b_1 = a_2 - a_1 = 2$ e b_2 manualmente ($a_3 = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 = 7$ e $b_2 = a_3 - a_2 = 7 - 3 = 4$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\nu_2(b_n)$	1	2	2	≥ 3	3	≥ 4	4	≥ 5	5	≥ 6	6	≥ 7

Isso nos leva à seguinte conjectura: $\nu_2(b_{2k-1}) = k$ para $k \geq 1$ e $\nu_2(b_{2k}) \geq k + 1$ para $k \geq 1$. Com isso, podemos fazer uma indução. A base está na tabela acima (na verdade, b_1 e b_2, calculados acima da tabela, já são suficientes). Suponha que o resultado é válido para k. Então, como $\nu_2(b_{2k}) > \nu_2(b_{2k-1})$, vale a igualdade em $(*)$ e temos $\nu_2(b_{2k+1}) = 1 + \nu_2(b_{2k-1}) = k + 1$; além disso, como ambos $\nu_2(b_{2k})$ e $\nu_2(b_{2k+1})$ são pelo menos $k + 1$, $\min\{\nu_2(b_{2k}), \nu_2(b_{2k+1})\} = k + 1$ e $\nu_2(b_{2k+1}) \geq 1 + k + 1 = k + 2$, terminando o passo de indução.

Com isso, em particular temos $\nu_2(b_{4005}) = 2003$, como queríamos demonstrar. $\square$

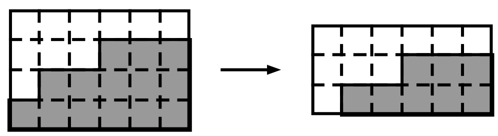
7. (Cone Sul 2004/6) Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções $\leftarrow$ e $\uparrow$.

   Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p.

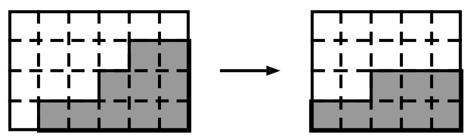
   Em quantos caminhos a área é um múltiplo de p?

   Solução. Seja $f_k(m,n)$ a quantidade de caminhos em um tabuleiro $m \times n$ com área congruente a $k \bmod p$. Vamos obter uma recursão para f_k. Suponha que $r_p(m) + r_p(n) > p$. Observamos a linha inferior do tabuleiro:

   - Se todos os quadradinhos dessa linha estão sob o caminho, eliminamos essa linha toda, obtendo um elemento de $f_{k-n \bmod p}(m-1,n)$.

   - Se algum quadradinho dessa linha não está sob o caminho, eliminamos a primeira coluna toda, obtendo um elemento de $f_k(m, n-1)$.

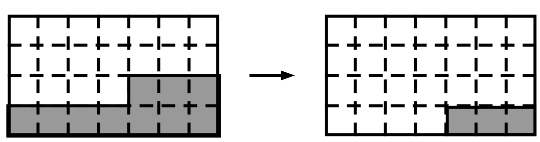
     

   Com isso,

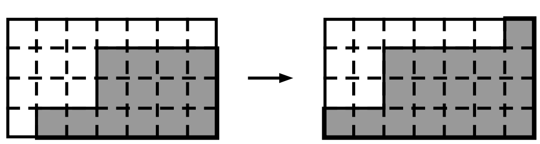
   $$f_k(m,n) = f_{k-n \bmod p}(m-1,n) + f_k(m,n-1).$$

   Note que, sendo $r_p(m) + r_p(n) > p$, não é possível que $r_p(m) = 0$ ou $r_p(n) = 0$, logo $r_p(m-1) = r_p(m) - 1$ e $r_p(n-1) = r_p(n) - 1$. Logo $r_p(m-1) + r_p(n) = r_p(m) + r_p(n-1) = r_p(m) + r_p(n) - 1 \geq p$.

   No caso base, em que $r_p(m) + r_p(n) = p$, mostraremos que $f_0(m,n) = f_1(m,n) = \cdots = f_{p-1}(m,n)$. Para isso, mostramos que $f_k(m,n) = f_{k-n \bmod p}(m,n)$ com uma bijeção semelhante à recursão acima: se a linha inferior estiver cheia, "baixamos" o caminho uma unidade para baixo, obtendo um caminho de área n unidades menor.

   Se não estiver cheia, "deslocamos" o caminho uma unidade para a esquerda e aumentamos uma coluna na direita, obtendo um caminho de área m unidades maior. Como $r_p(m) + r_p(n) = p \implies m + n \equiv 0 \pmod p \iff m \equiv -n \pmod p$, a nova área é congruente a $k + m \equiv k - n \pmod p$.

   Note que obtemos uma bijeção: para inverter essa transformação, basta observar a linha superior: se estiver vazia, "subimos" tudo uma unidade para cima; se não estiver, "deslocamos" tudo para a direita, eliminando a coluna cheia da direita.

Com isso, nesse caso provamos que $f_0(m,n) = f_{-n \bmod p}(m,n) = f_{-2n \bmod p}(m,n) = \cdots = f_{-(p-1)n \bmod p}(m,n)$. Como $r_p(n) \neq 0$ e p é primo, p e n são primos entre si e $0, -n, -2n, \ldots, -(p-1)n$ forma um sistema completo de resíduos, de modo que $f_0(m,n) = f_1(m,n) = f_2(m,n) = \cdots = f_{p-1}(m,n)$.

Nesse caso, como há $\frac{(m+n)!}{m!\,n!} = \binom{m+n}{m}$ anagramas de m $\leftarrow$'s e n $\uparrow$'s, teríamos $f_k(m,n) = \frac{1}{p}\binom{m+n}{m}$. Finalmente, provamos por indução que $f_k(m,n) = \frac{1}{p}\binom{m+n}{m}$: supondo o resultado verdadeiro para $p \le r_p(m)+r_p(n) < N$, temos $r_p(m-1)+r_p(n) = r_p(m)+r_p(n-1) = r_p(m)+r_p(n)-1 = N-1 < N$ e

$$\begin{aligned} f_k(m,n) &= f_{k-n \bmod p}(m-1,n) + f_k(m,n-1) \\ &= \frac{1}{p}\binom{m-1+n}{m} + \frac{1}{p}\binom{m+n-1}{m-1} = \frac{1}{p}\binom{m+n}{m}, \end{aligned}$$

em que no último passo usamos a *relação de Stiefel*: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Logo, em particular, a quantidade de caminhos com área um múltiplo de p é

$$f_0(m,n) = \frac{1}{p}\binom{m+n}{m}. \quad \square$$

8. (Cone Sul 1998/6) O Prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos uma linha de ônibus, no qual:

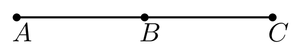
   (i) cada linha passe exatamente por três paradas;
   (ii) cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum;
   (iii) para cada duas paradas de ônibus distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.

   Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

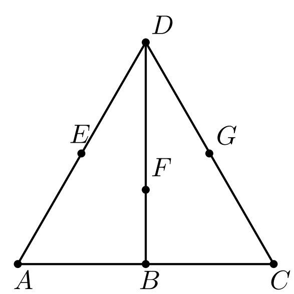
   Solução. Vamos representar linhas de ônibus por uma reta e paradas por pontos. Uma linha passa por uma parada se, e somente se, a reta correspondente passa pelo ponto correspondente. Reescrevendo as três condições do enunciado em termos de retas e pontos, temos:

   (i) cada reta passa exatamente por três pontos;
   (ii) cada duas retas distintas têm exatamente um ponto em comum;
   (iii) por dois pontos passa exatamente uma reta.

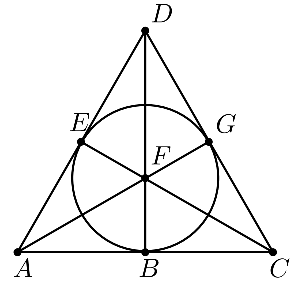
   Assim, podemos desenhar (isso mesmo!) as possibilidades. Uma é ter exatamente uma linha (cidade pequena essa, não?), totalizando três pontos A, B e C:



   Agora, pode haver mais pontos. Considere um ponto D fora da reta. Por A e D passa uma reta, e essa reta não pode ser ABC, pois ela não teria três pontos; essa nova reta não pode passar por B ou por C, pois duas retas têm exatamente um ponto em comum. Assim, a reta AD precisa conter um novo ponto E. Analogamente, obtemos as retas BDF e CDG.



   Será que pode haver mais um ponto H? Vejamos a reta DH. Ela deve cortar a reta ABC em um de seus pontos, mas nenhum deles serve, já que já temos as retas AD, BD e CD e se um dos pontos A, B ou C pertencesse a DH então essa reta e AD, BD ou CD têm dois pontos de interseção (D e um dos pontos A, B, C). Então não podemos mais ter pontos. Completando as linhas, podemos obter o seguinte exemplo, com 7 paradas (uma das linhas é circular):



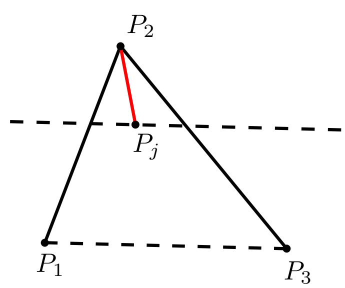
   Deste modo, a cidade tem 3 ou 7 paradas. □

9. Prove que um n-ágono (não necessariamente convexo, mas necessariamente sem entrelaçamentos) é sempre triangulado em $n-2$ triângulos.

Solução. A solução óbvia seria considerar um vértice, seus dois vizinhos, e cortar o triângulo, e depois fazer a indução. Mas isso tem vários problemas: o ângulo pode ser maior do que $180°$, o que pode ser corrigido observando que podemos escolher um ângulo agudo. Mas mesmo assim, podemos não cortar o triângulo, pois pode ocorrer da diagonal correspondente cortar outros lados.

A parte não óbvia, então, é provar que é possível cortar o polígono em outros dois polígonos, cada um com menos lados. Aí a indução termina fácil: para $n = 3$ temos $n-2 = 1$ triângulo sempre, e se dividimos o polígono em dois polígonos por uma diagonal que deixa m e $n-m$ lados, um com $m+1$ lados e outro com $n-m+1$ lados, a quantidade de triângulos é $m+1-2+n-m+1-2 = n-2$, e a indução termina.

Vamos provar que é possível dividir então. Considere um ângulo agudo $\angle P_1P_2P_3$ (se não for com esses índices, renumere). Se o triângulo $P_1P_2P_3$ não tem vértices em seu interior ou seu perímetro, acabou. Então, seja P_j o ponto no interior de $P_1P_2P_3$ mais distante de P_1P_3 (que é, de certo modo, um ponto próximo a P_2).



Então o triângulo formado por P_1P_2, P_2P_3 e a paralela a P_1P_3 por P_j não tem vértices em seu interior, o que mostra que a diagonal P_2P_j não corta outros lados, e pode ser a que divide o polígono. A demonstração está completa. □

10. A *sequência de Knuth* é definida por $K_0 = 1$ e $K_{n+1} = 1 + \min\{2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}\}$ para $n \geq 0$. Prove que $K_n \geq n$ para $n \geq 0$.

   Solução. Provaremos na verdade que $K_n \geq n+1$. Isso é verdade para $n = 0$. Então, pensando em K_{n+1}, suponha que $K_m \geq m+1$ para $m \leq n$, de modo que

$$2K_{\lfloor n/2} \geq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \geq 2\frac{n-1}{2} + 2 = n+1$$
$$3K_{\lfloor n/3} \geq 3\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1\right) \geq 3\frac{n-2}{3} + 3 = n+1$$

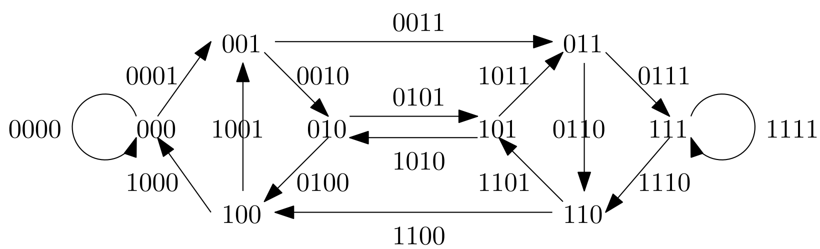
   Logo $K_{n+1} \geq 1 + (n+1)$, e o resultado segue por indução. □

   Comentário. Como exercício, tente mostrar que $K_n \geq n$ diretamente pare ver como é difícil.

11. (Ciclos de deBruijn) Prove que é possível colocar em círculo 2^n números, cada um deles igual a 0 ou 1, de modo que, ao lermos todas as 2^n sequências de n números consecutivos (no sentido horário) obtemos todas as sequências binárias possíveis de tamanho n. Para $n = 3$, um exemplo é 10001110.

    Solução. Para $n = 1$, 01 funciona.

    Para $n > 1$, construa o grafo com vértices em $\{0,1\}^{n-1}$ e arestas direcionadas de $a_1 \ldots a_{n-1}$ a $a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ (ou seja, os $n-2$ últimos números da origem coincidem com os $n-2$ primeiros números do destino. Associe a cada aresta $a_1 \ldots a_{n-1} \to a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ a sequência $a_1 \ldots a_n$ de n números. Para $n = 4$, o grafo é



    Como, para cada aresta, o in-grau e o out-grau são iguais a 2 (duas possibilidades para a_1 e a_n), ele admite um circuito euleriano; três vértices consecutivos são da forma $a_1 \ldots a_{n-1} \to a_2 \ldots a_n \to a_3 \ldots a_{n+1}$, as duas arestas consecutivas são $a_1 \ldots a_n$ e $a_2 \ldots a_{n+1}$, que podem ser sequências consecutivas no círculo. Assim, o circuito obtido induz os números em círculo.

    Novamente, no caso $n = 4$, o circuito

$$\begin{aligned} &0000 \to 0001 \to 0010 \to 0101 \to 1010 \to 0100 \to 1001 \to 0011 \\ &\to 0110 \to 1101 \to 1011 \to 0111 \to 1111 \to 1110 \to 1100 \to 1000 \end{aligned}$$

    gera a sequência

$$0000101001101111. \quad \square$$

12. (Cone Sul 1996/3) Uma loja vende garrafas com as seguintes capacidades: 1 litro, 2 litros, ..., 1996 litros. Os preços das garrafas satisfazem as duas condições a seguir:

    1. Duas garrafas têm o mesmo preço se e somente se suas capacidades m, n $(m > n)$ satisfazem $m - n = 1000$.
    2. Cada garrafa de m litros de capacidade $(1 \leq m \leq 1000)$ custa $1996 - m$ dólares.

    Achar todos os pares de garrafas de m e n litros tais que:

    (a) $m + n = 1996$;

    (b) o custo total do par seja o menor possível;

    (c) com o par se possa medir k litros, para todo k inteiro desde 1 até 1996.

    NOTA: As operações permitidas para medir são:

    i. Encher ou esvaziar qualquer das duas garrafas.

    ii. Passar líquido de uma garrafa para a outra.

    Ter-se-á conseguido medir k litros quando a quantidade de litros de uma garrafa mais a quantidade de litros da outra é igual a k.

    Solução. Os preços das garrafas são, em ordem de volume,

$$1995, 1994, 1993, \ldots, 996, 1995, 1996, \ldots, 1000.$$

Todas as operações só nos permitem medir k litros com k múltiplo de $\mathrm{mdc}(m, n)$. Isso pode ser provado por indução: inicialmente ambas têm 0, que é múltiplo de $\mathrm{mdc}(m, n)$; se as garrafas têm a e b litros, respectivamente, e fizermos a operação (i) obtemos 0, m, n ou 0 como novas medidas. Todos são múltiplos de $\mathrm{mdc}(m, n)$; se fizermos a operação (ii), temos ou $a+b$ litros em uma garrafa ou m e $a + b - m$ litros ou $a + b - n$ e n litros; pela hipótese de indução, a e b são múltiplos de $\mathrm{mdc}(m, n)$, e $a+b-m$ e $a+b-n$ também são, provando a nossa afirmação. Assim, para podermos medir k litros $1 \leq k \leq 1996$, m e n devem ser primos entre si.

Isso já descarta todos os números pares. As duas garrafas mais baratas têm capacidades 999 e 997, e somam (tanto em custo como em capacidade) 1996. Com elas, podemos medir $999 - 997 = 2$ litros: enchemos a garrafa de 999 litros e despejamos na de 997: sobram 2 litros na de 999. Representando as operações com setas e os conteúdos nas duas garrafas por pares ordenados, temos:

$$(0, 0) \to (999, 0) \to (2, 997) \to (2, 0)$$

Continuando daí, conseguimos todos os pares até 998:

$$(2, 0) \to (0, 2) \to (999, 2) \to (4, 997) \to (4, 0)$$

e, em geral, para $k = 1, 2, \ldots, 996$, k par:

$$(k, 0) \to (0, k) \to (999, k) \to (k + 2, 997) \to (k + 2, 0)$$

Com isso, conseguimos todos os ímpares: de $(998, 0)$ obtemos $(1, 997) \to (1, 0)$ e usamos a mesma cadeia de operações acima para k ímpar. Com isso, conseguimos todas as medidas de 1 a 999 litros. Mas colocando essas medidas na garrafa de 999 litros e enchendo a garrafa de 997 litros obtemos $k + 997$ litros para $k = 1, 2, \ldots, 999$, ou seja, conseguimos todas as medidas de 1 a 1996 litros.

Logo o único par $\{m, n\}$ desejado é $\{997, 999\}$. $\square$

13. (Cone Sul 1999/3) Há 1999 bolinhas em uma reta; algumas são vermelhas e as demais azuis (poderiam ser todas vermelhas ou todas azuis). Debaixo de cada bolinha escrevemos o número igual à soma da quantidade de bolinhas vermelhas à direita dela mais quantidade de bolinhas azuis à esquerda dela. Se, na sequência de números assim obtida, houver exatamente três números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes, quais podem ser estes três números?

Solução. Suponha que duas bolinhas vizinhas tenham cores diferentes, sendo vermelha e azul, nessa ordem. Como as quantidades de bolinhas vermelhas à direita e de bolinhas azuis à esquerda não mudam, os dois números dessas bolinhas são iguais. Se elas estiverem na ordem azul-vermelha, a quantidade de bolinhas vermelhas é uma unidade menor na bolinha da direita e a quantidade de bolinhas azuis é uma unidade maior na bolinha da direita. Da mesma forma, os números dessas bolinhas são iguais.

Vamos trocar bolinhas vizinhas de cores diferentes de lugar. Ao trocar azul-vermelho por vermelho-azul, o número comum nas duas bolinhas diminui em uma unidade, mas continuam iguais; os outros números ficam inalterados. Ao fazer a operação inversa, o número comum aumenta em uma unidade. Isso não altera a paridade das quantidades de vezes que cada número aparece. Com isso, podemos mudar a sequência de bolinhas de modo que todas as bolinhas vermelhas fiquem à esquerda e todas as bolinhas azuis fiquem à direita: tome a bolinha vermelha mais à esquerda (se houver) e troque-a de posição com todas as bolinhas azuis à sua esquerda, deixando-a na primeira posição; repita esse procedimento com a próxima bolinha vermelha, até acabarem as bolinhas vermelhas.

Com isso, suponha que há n bolinhas vermelhas e $1999-n$ bolinhas azuis. Os números são, então, $n-1, n-2, \ldots, 1, 0, 0, 1, 2, \ldots, 1998-n$. Assim, se $n-1 < 1998-n$ todos os números de 0 a $n-1$ aparecem duas vezes e os números $n, \ldots, 1998-n$ aparecem uma vez. Assim, devemos ter $1998-n = n+2 \iff n = 998$, e os três números que aparecem um número ímpar de vezes são 998, 999 e 1000. Se $n-1 > 1998-n$, os números de 0 a $1998-n$ aparecem duas vezes e os números $1999-n, \ldots, n-1$ aparecem uma vez. Então devemos ter $n-1 = 1999-n+2 \iff n = 1001$ e os três números são novamente 998, 999 e 1000. $\square$

14. (IMO 2016/6) Há $n \geq 2$ segmentos no plano tais que cada par de segmentos se intersecta num ponto interior a ambos e não há três segmentos que tenham um ponto em comum. Geoff deve escolher um dos extremos de cada segmento e colocar sobre ele um sapo, virado para o outro extremo. Depois ele baterá palmas $n-1$ vezes. Cada vez que ele bater as mãos, cada sapo saltará imediatamente para a frente até o próximo ponto de interseção sobre o segmento. Os sapos nunca mudam a direção dos seus saltos. Geoff deseja colocar os sapos de tal forma que dois sapos nunca ocupem ao mesmo tempo o mesmo ponto de interseção.

(a) Prove que se n é ímpar, Geoff sempre tem uma maneira de realizar o seu desejo.

(b) Prove que se n é par, Geoff nunca realiza o seu desejo.

Solução. Considere um círculo grande o suficiente para conter todos os segmentos em seu interior, e estenda cada segmento até cortar o círculo. Podemos substituir cada extremidade de cada segmento pelas interseções de sua extensão com o círculo. Numere, no sentido anti-horário, as extremidades de 1 a $2n$.

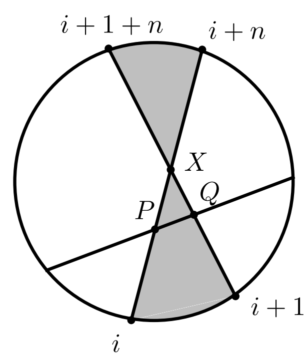
Os seguintes dois fatos essencialmente resolvem o problema:

(i) Os segmentos têm extremidades i e $i+n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por conta desse fato, numeraremos os segmentos de 1 a n de acordo (como esperado, o segmento i liga os pontos i e $i+n$).

(ii) Se colocarmos dois sapos em extremidades vizinhas, eles ocupam o mesmo ponto de interseção ao mesmo tempo.

Demonstração de (i): Considere um segmento e sejam $i < j$ suas extremidades. Então, como cada um dos outros $n-1$ segmentos corta o segmento ij em seu interior, ij divide cada um desses segmentos, deixando uma extremidade de cada lado. Assim, ij deixam $n-1$ extremidades de cada lado, e são, portanto, opostos, ou seja, i e $i+n$.

Demonstração de (ii): Considere dois segmentos i e $i+1$ (em que o segmento $n+1$ coincide com o segmento 1). Pelo que provamos anteriormente, não há extremidades de segmentos nas regiões destacadas a seguir $(*)$.



Agora, sendo P um ponto sobre o segmento i pertencente a qualquer outro segmento $j \neq i+1$, o ponto Q em que j corta o segmento $i+1$ deve ser tal que PQ está sobre a mesma região destacada, pois caso contrário PQ corta os arcos que ligam i a $i+1$ e $i+n$ a $i+n+1$, o que contraria $(*)$. Logo, sendo X a interseção dos segmentos i e $i+1$ a quantidade de interseções dos segmentos que ligam i e X, e $i+1$ e X com os demais $n-2$ segmentos são iguais. Com isso, se colocarmos os sapos nas extremidades i e $i+1$ eles ocuparão a mesma interseção.

Com isso, o problema acaba em ambos os itens: somos obrigados a escolher extremidades alternadas, ou seja, todas as pares ou todos as ímpares. Isso termina o item (b), pois se n é par somos obrigados a escolher i e $i+n$, que são extremidades do mesmo segmento.

Se n é ímpar, qualquer escolha dá certo. De fato, sendo $i < j$ duas extremidades escolhidas, i e j têm a mesma paridade, e há uma quantidade ímpar de extremidades $(j - i - 1)$ entre i e j (de $i + 1$ a $j - 1$). Sendo Y a interseção dos segmentos i e j, os segmentos de $i + 1$ a $j - 1$ cortam ou o segmento que liga Y e i ou o segmento que liga Y a j; como o total de segmentos é ímpar, as quantidades de interseções de i a Y e de j a Y têm paridades diferentes, e são portanto diferentes. Logo para ímpar é possível. $\square$

15. (IMO 2014/5) Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

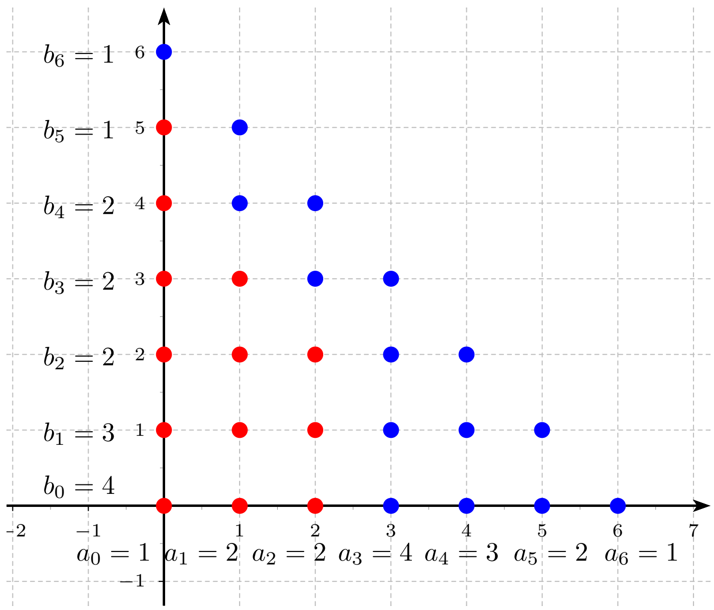
    Solução. Troque 100 por k e faça indução sobre k. O problema é imediato para $k = 1$. Se $k > 1$, podemos supor que há no máximo 1 moeda com valor $\frac{1}{2m}$ (se houver mais de uma moeda, trocamos 2 por uma moeda de valor $\frac{1}{m}$ repetidamente) e $2m$ moedas com valor $\frac{1}{2m+1}$ (se houver mais, trocamos $2m + 1$ delas por uma moeda de 1, e aplicamos a hipótese de indução).

    Agora, numere os grupos de moedas de 1 a k, e coloque no grupo i as moedas de valores $\frac{1}{2i-1}$ e $\frac{1}{2i}$ (que somam uma quantia menor ou igual a $\frac{1}{2i} + \frac{2i-2}{2i-1} < \frac{1}{2i-1} + \frac{2i-2}{2i-1} = 1$).

    E as moedas com valores menores do que $\frac{1}{2k}$? Coloque-as arbitrariamente nos grupos, desde que não ultrapassem o valor total de 1. Como só não dá para colocar se o valor que faltar para o grupo dar 1 é menor do que $\frac{1}{2k+1}$, o total nos grupos é maior do que $k\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = k - \frac{k}{2k+1} > k - \frac{1}{2}$, e o problema está resolvido. $\square$

16. (IMO 2002/1) Seja n um inteiro positivo. Seja T o conjunto de pontos $(x; y)$ no plano onde x e y são inteiros não negativos e $x + y < n$. Cada ponto de T é pintado de vermelho ou azul. Se um ponto $(x; y)$ é vermelho, então todos os pontos $(x'; y')$ com $x' \le x$ e $y' \le y$ também são. Um conjunto X é um conjunto de n pontos azuis com abcissas todas diferentes, e um conjunto Y é um conjunto de n pontos azuis com ordenadas todas diferentes. Prove que o número de conjuntos X é igual ao número de conjuntos Y.

Solução. Mostraremos que as quantidades $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ de pontos azuis com abcissas $0, 1, \ldots, n-1$, respectivamente, são iguais às quantidades $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ de pontos azuis com ordenadas $0, 1, \ldots, n-1$, respectivamente, a menos de permutação. Como a quantidade de conjuntos X é o produto $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ e a quantidade de conjuntos Y é o produto $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$, o resultado segue desse fato. A seguir, um exemplo com $n = 7$:



Provaremos o resultado por indução. Para $n = 1$, o problema é imediato pois só há o ponto $(0, 0)$, e ou $a_0 = b_0 = 0$ ou $a_0 = b_0 = 1$. Considere então $n > 1$ e suponha que o resultado é verdadeiro para valores menores. Se todo ponto $(t, n-1-t)$ é azul, desconsidere-os e aplique a hipótese de indução, ou seja, as quantidades anteriores $a_0, \ldots, a_{n-2}$ e $b_0, \ldots, b_{n-2}$ são iguais a menos de permutação. Então as quantidades na configuração atual são $a_0+1, a_1+1, \ldots, a_{n-2}+1, 1$ e $b_0+1, b_1+1, \ldots, b_{n-2}+1, 1$, que também são iguais a menos de permutação. Se algum ponto $(t, n-1-t)$ é vermelho, todo ponto (x, y) com $0 \le x \le t$ e $0 \le y \le n-1-t$ é vermelho, de modo que podemos considerar somente os pontos (x, y) com $x+y < n$, $0 \le x \le t-1$ e $n-1-t < y \le n-1$, ou $x + y < n$, $t+1 \le x \le n-1$ e $0 \le y \le n-1$. Eles formam duas configurações semelhantes, com quantidades menores de pontos, e podemos aplicar a hipótese de indução, e as quantidades são iguais dentro de cada configuração. O resultado segue por indução. □

Outra solução rápida, sem indução, está esboçada a seguir:

Solução (Esboço). Use as mesmas notações da solução anterior e numere cada ponto azul (x, y) com $n - x - y$, de modo que a diagonal $x + y = n - 1$ fica com o número 1, $x + y = n - 2$ fica com o número 2, e assim por diante. Então a_i é o número do ponto azul (i, j) mais baixo e b_i é o número do ponto azul (t, i) mais à esquerda. Agora, a quantidade de a_i's e b_i's iguais a k é igual à quantidade de números k azuis menos a quantidade de números $k-1$ azuis. O resultado segue.

17. (IMO 2007/3) Numa competição de matemática alguns participantes são amigos. A amizade é sempre recíproca. Dizemos que um grupo de participantes é um *clique* se dois quaisquer deles são amigos (em particular, qualquer grupo com menos de dois participantes é um clique). O *tamanho* de um clique é o número de seus elementos. Sabe-se que nesta competição o tamanho máximo dos cliques é par.

    Prove que os participantes podem ser distribuídos em duas salas, de modo que o tamanho máximo dos cliques contidos numa sala é igual ao tamanho máximo dos cliques contidos na outra sala.

    Solução. Fazemos o seguinte algoritmo: primeiro deixe um dos cliques máximos M em uma sala A e todos os demais participantes na outra sala B. Sejam $S(A)$ e $S(B)$ os tamanhos dos cliques máximos em A e B, respectivamente. Temos $2m = S(A) \geq S(B)$. Enquanto $S(A) > S(B)$, transfira uma pessoa de A para B, até que $S(A) \leq S(B)$. Esse movimento diminui $S(A)$ em 1 e aumenta $S(B)$ em 0 ou 1. Se nesse momento $S(A) = S(B)$, acabou. Se não, temos $S(A) = S(B) - 1 = k$. Note que, nesse momento, $S(A) \geq m$.

    Agora vamos tentar retornar alguém de B para A. Se existem $x \in M$ em B e um clique C em B de tamanho $k+1$ com $m \notin C$, é só transferir x para A, que aumentamos $S(A)$ para $k+1$ enquanto mantemos $S(B) = k+1$.

    Sobra o caso em que qualquer clique de tamanho $k+1$ contém $B \cap M$. Nesse caso, vamos diminuir $S(B)$: enquanto existirem cliques C de tamanho $k+1$ em B, transfira $x \in C \setminus M$ (que existe pois $|C| = k+1 > k \geq m \geq |B \cap M|$). Quando terminarem os cliques, pare. Temos $S(B) = k$. E $S(A)$? Sabemos que tem um clique de tamanho k lá ($A \cap M$), então $S(A) \geq k$. Tome um outro clique D qualquer. Considere $M \cap D$: eles são amigos, obviamente, de todos em $M \cap B$; os outros foram retirados de cliques que contêm $M \cap B$, então também são todos amigos de todos de $M \cap B$. Isso quer dizer que $D \cup (M \cap B)$ é um clique, e sendo M máximo, $D \subset A$, $M \cap B \subset B$ e $A \cap B = \emptyset \implies |M| = |A \cap M| + |B \cap M|$,

    $$|M| \geq |D \cup (M \cap B)| = |D| + |M \cap B| = |D| + |M| - |A \cap M| \implies |D| \leq |A \cap M| = k,$$

    e portanto $S(A) = k$. O problema acabou. $\square$

18. (IMO 2019/3) Uma rede social possui 2019 usuários, alguns deles são amigos. Sempre que o usuário A é amigo do usuário B, o usuário B também é amigo do usuário A. Eventos do seguinte tipo podem acontecer repetidamente, um de cada vez:

> Três usuários A, B e C tais que A é amigo de B e A é amigo de C, mas B e C não são amigos, mudam seus estados de amizade de modo que B e C agora são amigos, mas A deixa de ser amigo de B e A deixa de ser amigo de C. Todos os outros estados de amizade não são alterados.

Inicialmente, 1010 usuários possuem exatamente 1009 amigos cada e 1009 usuários possuem exatamente 1010 amigos cada. Prove que existe uma sequência de tais eventos tal que, após essa sequência, cada usuário é amigo de no máximo um outro usuário.

Solução. Considere o grafo G usual em que os vértices são os usuários e as arestas são as amizades. Primeiro, veja que G é conexo, pois se $uv \notin A(G)$ então, como $d(u)+d(v) \geq 1009+1009 = 2018 > 2017$, u e v têm um vizinho em comum (e portanto a distância máxima no grafo é 2).

Agora faça a operação repetidamente em qualquer trio de vértices, desde que o grafo se mantenha conexo. Note que a operação diminui a quantidade de arestas em 1. Como está o grafo H quando não pudermos mais fazer a operação? H não é um clique (o que não acontece pois H tem menos arestas do que G, e G não é um clique).

- Se H é uma árvore, não podemos diminuir a quantidade de arestas, e não podemos mais fazer operações.
- Se H não é uma árvore, considere um ciclo mínimo $v_1v_2\dots v_kv_1$ de H. Sendo esse ciclo mínimo, ele não tem cordas (se não o ciclo que tem a corda e uma parte dos lados é menor). Se esse ciclo for H, não podemos mais fazer operações, pois se fizermos no vértice v_i, desconectamos v_i do resto do grafo.
- Se esse ciclo não contiver todos os vértices de H, seja w um vértice que não está no ciclo que é vizinho de algum vértice do ciclo, que pode ser v_2 sem perda de generalidade. Se w não estiver ligado a v_1 ou v_3, digamos a v_1, temos, no triângulo wv_1v_2, v_2 ligado a v_1 e w, e v_1 e w não ligados. Realizar a operação nesse triângulo troca as arestas v_1v_2 e v_2w por v_1w. O que era o ciclo vira um caminho $v_2v_3\dots v_kv_1$, que é conexo, e w está ligado a v_1, ou seja, o grafo está conexo. Então w precisa estar ligado a v_1, v_2 e v_3. Se $k > 3$, v_1 e v_3 não estão ligados, e fazemos a operação em wv_1v_3: trocamos wv_1 e wv_3 por v_1v_3; o ciclo fica (ainda mais) conexo e w ainda está ligado a v_2, outro absurdo. Assim, $k = 3$ e w está ligado a v_1, v_2, v_3, formando um 4-clique. Mostraremos que H deve ser um clique, o que contradiz o fato de H não ter mais arestas do que G. De fato, se C é um clique máximo de H, considere um vértice u vizinho a algum vértice v de C. Seja w um vértice de C a quem u *não* está ligado, e seja v um outro vértice qualquer de C. Então fazemos a operação em uvw, trocando uv e vw por uw. O clique perde só uma aresta e continua conexo e w continua conectado ao clique, absurdo. Logo não existe w, e $H = C$ é um clique.

Com isso, mostramos que ao mantermos a conexidade do grafo, quando não pudermos mais fazer operações H sendo uma árvore ou um ciclo. Se H é uma árvore, provemos por indução na quantidade de vértices da árvore que é possível deixar todos com um ou nenhum vizinho: o problema é imediatamente verdadeiro para 1 ou 2 vértices; se a quantidade de vértices é maior, suponha o resultado válido para quantidades menores de vértices e execute a operação em qualquer trio (podemos tomar, por exemplo, uma folha v, seu vizinho w, e qualquer vizinho de w diferente de v – isso é possível pois temos pelo menos três vértices!); isso desconecta a árvore, e mantém as componentes conexas acíclicas: de fato, ao fazer a operação trocamos o único caminho uvw pelo caminho uw; se uw fechasse um ciclo existiria um outro caminho de u a w, que não passa por v, e o grafo original teria ciclo, o que não é possível. Assim podemos usar a hipótese de indução nas árvores menores.

Finalmente, como a operação diminui o grau de um vértice em 2, mantendo o grau dos demais vértices, as paridades dos graus não mudam, e não é possível que H seja um ciclo, já que G tem vértices de grau ímpar, e um ciclo só tem vértices de grau 2, que é par. Com isso, só sobra o caso da árvore, que já mostramos ser possível. $\square$

19. (Cone Sul 2014/6) Dada um família F de subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$), uma jogada permitida é escolher dois conjuntos *disjuntos* A e B de F e agregar $A \cup B$ a F, mantendo A e B em F.

    Inicialmente, F tem exatamente todos os subconjuntos unitários de S. O objetivo é obter, mediante jogadas permitidas, que F tenha todos os subconjuntos de $n-1$ elementos de S.

    Determine o menor número de jogadas necessárias para alcançar o objetivo.

    Observação: $A \cup B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B, ou a ambos.

    Solução. Seja m_n a quantidade mínimas de jogadas necessárias para alcançar o objetivo. Fazendo alguns casos pequenos, encontramos $m_2 = 0$, $m_3 = 3$, $m_4 = 6$ e (com um pouco de esforço) $m_5 = 9$. Provaremos por indução que $m_n = 3(n-2)$.

    A base é $n = 2$, para o qual não há nada para provar. Suponha agora que $n \geq 3$.

    Primeiro provaremos que $m_n \leq 3(n-2)$. Para isso, considere o seguinte procedimento:

    - Divida os números de 1 a n em $\lceil n/2 \rceil$ grupos, formando pares. Se n é ímpar, deixe um número sozinho. Note que fizemos $\lfloor n/2 \rfloor$ jogadas (não aplicamos a jogada no unitário, é claro).
    - Aplicamos o procedimento para os $\lceil n/2 \rceil$ grupos, obtendo subconjuntos cujo complementar em relação a S são o grupo que falta, sendo $m_{\lceil n/2 \rceil}$ jogadas.
    - $\lfloor n/2 \rfloor$ desses complementares são de tamanho 2, e para eles completamos colocando cada um dos números que faltam, dando dois movimentos a mais por subconjunto, ou seja, $2\lfloor n/2 \rfloor$ jogadas.

    Por exemplo, para $n = 5$ montamos os pares $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ e o unitário $\{5\}$ (no total $\lceil 5/2 \rceil = 3$ conjuntos e $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ jogadas), aplicamos o procedimento (m_3 jogadas) obtendo $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5\}$. Completamos esses dois últimos conjuntos com 3 e 4 ($\{1, 2, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 4, 5\}$) e 1 e 2, respectivamente ($\{1, 3, 4, 5\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$). Note que já obtemos $\{1, 2, 3, 4\}$. Observe que $\lceil n/2 \rceil < n$ para $n \geq 3$. Com isso, temos

    $$m_n \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + m_{\lceil n/2 \rceil} + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right) = 3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right) = 3(n-2).$$

    Agora provemos que $m_n \geq 3(n-2)$. Considere um elemento $x \in S$ qualquer e descarte-o. Com isso, temos as seguintes jogadas:

    - As jogadas que obtêm os subconjuntos S_i que contêm x. Com isso, obtemos todos os subconjuntos de $S \setminus \{x\}$ com $n-2$ elementos, e precisamos de pelo menos m_{n-1} jogadas.
    - As jogadas que obtêm o subconjunto $S_i \setminus \{x\}$. Isso requer pelo menos uma jogada a mais, já que em nenhum momento, entre as m_{n-1} jogadas, é necessário obter esse conjunto.
    - As jogadas que consistem em juntar $\{x\}$ com algum outro conjunto, que não foram contadas anteriormente. Seja k_x tal quantidade de jogadas.

    Então, para obter os subconjuntos temos

    $$m_n \geq m_{n-1} + 1 + k_x \geq 3(n-1-2) + 1 + k_x = 3(n-2) + k_x - 2.$$

    Basta provar que existe x tal que $k_x \geq 2$. Mas suponha que a primeira jogada de todas foi $\{1, 2\}$. Afirmamos que $k_1 \geq 2$ ou $k_2 \geq 2$. De fato, a primeira jogada implica $k_1 \geq 1$ e $k_2 \geq 1$. Se $k_1 = k_2 = 1$, então nunca mais utilizamos $\{1\}$ ou $\{2\}$ nas jogadas. Mas isso quer dizer que todas as jogadas envolvendo 1 ou 2 envolvem $\{1, 2\}$ e aí não é possível obter, por exemplo, $\{2, 3, \ldots, n\}$. Absurdo, logo $k_1 \geq 2$ ou $k_2 \geq 2$ e, consequentemente, $m_n \geq 3(n-2)$, como queríamos demonstrar.

    Portanto $m_n = 3(n-2)$.

20. (TST Reino Unido) Prove que todo grafo planar pode ter suas arestas direcionadas de modo que o in-grau (número de arestas que entram) de cada vértice é menor ou igual a 3.

Solução. Indução sobre a quantidade de vértices. Se só há um vértice, não há o que provar.

Assim como na demonstração do teorema de Thomassen, podemos supor sem perda de generalidade que o grafo G é quasi-triangulado. Seja C o ciclo exterior. Vamos provar na verdade que podemos direcionar as arestas de G tal que o in-grau de cada vértice de C pode ser menor ou igual a 2 e o resto, menor ou igual a 3.

Numere os vértices de C como $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$, em ordem, e remova v_2 de G (isso pode desconectar o grafo se $v_2 v_i$ é uma corda, mas tudo bem – o grafo G pode ser desconexo, em princípio). Aplique a hipótese de indução sobre o grafo obtido H, e coloque v_2 de volta. Direcione as arestas de v_2 de modo que as arestas vindo de v_1 e v_3 estão entrando e todas as demais estão saindo. O vértice v_2 tem in-grau 2, v_i, $i \neq 2$, continuam sendo vértices de ciclo (ou ciclos, caso desconecte G), e os vizinhos de v_2 são vértices de borda de H, e têm in-grau no máximo 2, podendo receber mais uma aresta entrando de v_2 sem problemas. Isso conclui o passo de indução. $\square$