Polinômios Ciclotômicos

Prof. Luciano Monteiro de Castro
luciano@matematicamente.xyz

1. Determine a ordem das seguintes raízes da unidade:

(a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{180}$, para $k = 27, 99, 137$;

(b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{144}$, para $k = 10, 35, 60$.

2. Escreva os polinômios ciclotômicos $\Phi_n(x)$ para n igual a $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 105$.

3. Seja ω uma raiz primitiva $2n$-ésima da unidade. Calcule a soma $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$.

4. Seja R_n o conjunto de todas as raízes n-ésimas da unidade. Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{z \in R_n} z^k$, para k inteiro.

(b) $\displaystyle\sum_{z \in R_n} (x + z)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{1 \le k \le n-1} kz^{k-1}$, para cada $z \in R_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{1 \le k \le n-1} k^2 z^{k-1}$, para cada $z \in R_n$.

5. Determine a soma das raízes primitivas n-ésimas da unidade para n igual a 15, 24 e 30.

6. Prove que

(a) o produto de uma raiz a-ésima da unidade por uma raiz b-ésima da unidade é uma raiz ab-ésima da unidade;

(b) se a e b são inteiros positivos primos entre si, então os polinômios $x^a - 1$ e $x^b - 1$ possuem uma única raiz comum;

(c) se a e b são inteiros positivos primos entre si, então o produto de uma raiz primitiva a-ésima da unidade por uma raiz primitiva b-ésima da unidade é uma raiz primitiva ab-ésima da unidade, e reciprocamente;

(d) o item interior implica que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, quando a e b são inteiros positivos primos entre si.

7. Escreva o polinômio ciclotômico $\Phi_{p^m}(x)$ para p primo e m inteiro positivo.

8. Prove que $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, para n inteiro ímpar maior que 1.

9. Suponha que todos os fatores primos de d são fatores primos de n. Prove que toda raiz primitiva nd-ésima da unidade é uma raiz d-ésima de uma raiz primitiva n-ésima da unidade, e reciprocamente.

10. Prove que se a fatoração de n em primos é $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, então $\Phi_n(x) = \Phi_{n'}(x^{n''})$, com $n' = p_1 p_2 \cdots p_k$, $n'' = \dfrac{n}{n'}$.

11. Seja $\mu(n)$ a soma das raízes primitivas n-ésimas da unidade. Prove que $\mu(n) = 0$ se n é divisível pelo quadrado de algum número primo; $\mu(n) = 1$ se n é o produto de um número par de primos distintos; e $\mu(n) = -1$ se n é o produto de um número ímpar de primos distintos.

12. Prove que $\sum \mu(d) = 0$, quando d percorre todos os divisores de um número inteiro positivo $n \neq 1$.

13. Prove que

$$\Phi_n(x) = \prod_{d \mid n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

14. Calcule $\Phi_n(1)$.

15. Calcule $\Phi_n(-1)$

16. Calcule a soma dos produtos das raízes primitivas n-ésimas da unidade tomadas duas a duas.

17. Seja ω uma raiz primitiva n-ésima da unidade. Calcule o valor absoluto da soma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

Aplicações

18. Sejam m, n dois inteiros positivos e p um primo tal que p não divide mn. Então $\operatorname{mdc}(\Phi_m(x), \Phi_n(x)) = 1$ em $\mathbb{Z}_p[x]$.

19. Sejam m, n inteiros positivos distintos e a um inteiro. Se $\operatorname{mdc}(\Phi_m(a), \Phi_n(a)) = g \neq 1$, então g é uma potência de p e $m/n = p^k$, para algum inteiro k.

20. Para todo inteiro positivo n, existem infinitos números primos da forma $nk + 1$, com k inteiro.

21. Sejam $a, n > 1$ inteiros. Suponha que todos os fatores primos de $\Phi_n(a)$ são divisores de n. Então $\Phi_n(a)$ é um primo que divide n ou $n = 2$.

Problemas Olímpicos

22. Prove que se $4^n + 2^n + 1$ é um número primo, então n é uma potência de 3.

23. Prove que não há números primos na sequência infinita

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

24. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que todos os divisores primos de $n^2 + n + 1$ não superam $\sqrt{n}$.

25. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos distintos maiores que 3. Prove que $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ possui pelo menos 4^n divisores.

26. Seja p um número primo. Prove que existe um número primo q tal que, para todo inteiro n, o número $n^p - p$ não é divisível por q.

27. Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$