Potência de Ponto e Lemas Potentes

23ª Semana Olímpica – Natal, RN

Prof. Davi Lopes – Nível 3

1. Introdução

Potência de Ponto e Eixo Radical são assuntos bastante frequentes nas provas de olimpíada, tanto nos problemas mais antigos quanto nos problemas mais recentes. A princípio, alguém poderia pensar que tudo sobre esse assunto já foi exaustivamente explorado e cobrado nessas competições. Entretanto, veremos neste material que a situação é completamente diferente, e que ainda há muita novidade a ser explorada nessa área da geometria. Os quatro lemas que veremos aqui mostrarão que, embora esse assunto seja velho, ele ainda tem potência suficiente para alegrar jovens almas olímpicas com problemas excitantes, bonitos e prazerosos.

2. Definições Básicas

Antes de vermos os nossos tão aguardados lemas potentes, revisaremos os conceitos e as propriedades mais básicas de potência de ponto e de eixo radical. As demonstrações de todos os fatos mencionados nessa seção podem ser encontradas em [1] e em [2].

Definição de Potência de Ponto: Dada uma circunferência Γ, de centro O e raio R (Representaremos isso como $\Gamma(O,R)$), e um ponto P qualquer, definimos potência do ponto P relativo a Γ como sendo a expressão:

$$Pot_\Gamma P = PO^2 - R^2$$

O sinal da potência de um ponto relativo a uma circunferência diz qual a posição relativa entre esse ponto e a circunferência. Por isso, sempre é bom ficar atento ao sinal! Digo isso por experiência própria... :’(

- P está do lado de fora de Γ se, e somente se, $Pot_\Gamma(P) > 0$ (pois $PO > R$);
- P está em Γ se, e somente se, $Pot_\Gamma(P) = 0$ (pois $PO = R$);
- P está do lado de dentro de Γ se, e somente se, $Pot_\Gamma(P) < 0$ (pois $PO < R$);

Além disso, a potência de ponto é uma forma bastante eficiente para se trabalhar com quadriláteros cíclicos.

Proposição (Quadriláteros Cíclicos e Potência de Ponto): Sejam A, B, C, D quatro pontos no plano e suponha que as retas AB e CD se intersectam em P.

- Se P está no interior dos segmentos AB e CD (Figura 1), então A, B, C, D são concíclicos se, e somente se, $PA.PB = PC.PD$. Se Γ for uma circunferência que passa por A, B, C, D, então $PA.PB = PC.PD = -Pot_{\Gamma}P$.
- Se P está no exterior dos segmentos AB e CD (Figura 2), então A, B, C, D são concíclicos se, e somente se, $PA.PB = PC.PD$. Se Γ for uma circunferência que passa por A, B, C, D, então $PA.PB = PC.PD = +Pot_{\Gamma}P$.
- (Teorema do Bico): Se P é um ponto externo a uma circunferência Γ e $E, F \in \Gamma$ são tais que PE, PF são tangentes a Γ (Figura 2), então $PE^2 = PF^2 = Pot_{\Gamma}P$.

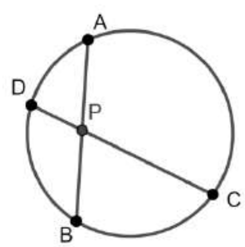

Figura 1

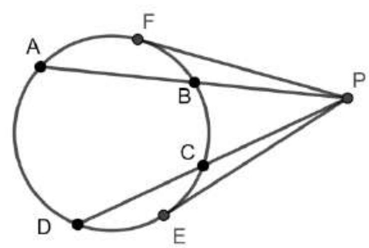

Figura 2

O principal diferencial da potência de ponto é que ela permite relacionar um ponto a não apenas uma, mas sim várias circunferências. Para tanto, usaremos eixos e centros radicais.

Definição de Eixo Radical: Dadas duas circunferências não concêntricas $\Gamma_1(O_1, R_1)$ e $\Gamma_1(O_2, R_2)$, o lugar geométrico dos pontos P tais que $Pot_{\Gamma_1}P = Pot_{\Gamma_2}P$ é uma reta $r \perp O_1O_2$, denominada *eixo radical de* Γ_1 *e* Γ_2 (figuras 3.1 e 3.2).

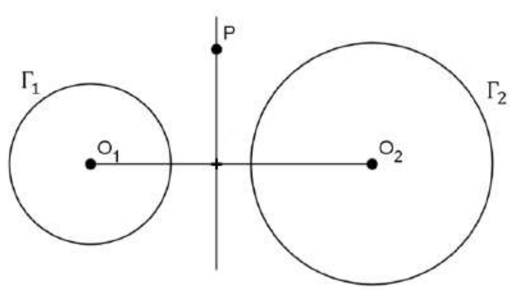

Figura 3.1

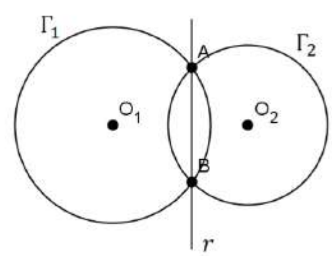

Figura 3.2

Proposição (Centro Radical): Dadas três circunferências $\Gamma_1(O_1, R_1)$, $\Gamma_2(O_2, R_2)$ e $\Gamma_3(O_3, R_3)$, cujos centros formam três pontos não colineares, sejam r_3, r_1, r_2 os eixos radicais de Γ_1 e Γ_2, Γ_2 e Γ_3, Γ_3 e Γ_1, respectivamente. Então, r_1, r_2, r_3 concorrem num ponto P, denomidado *centro radical de* Γ_1, Γ_2 *e* Γ_3 (Figura 4).

Observação: Quando O_1, O_2, O_3 são colineares, r_1, r_2, r_3 são paralelas (Figura 5), podendo até mesmo coincidir. Quando isso acontece, dizemos que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ são *coaxiais* (Figura 6).

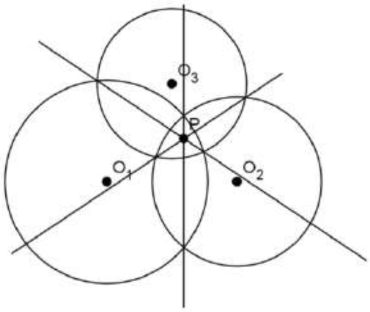

Figura 4

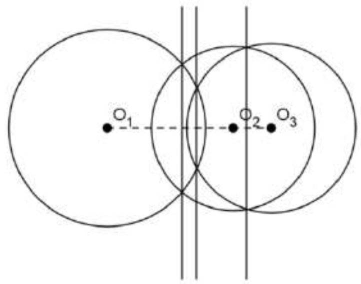

Figura 5

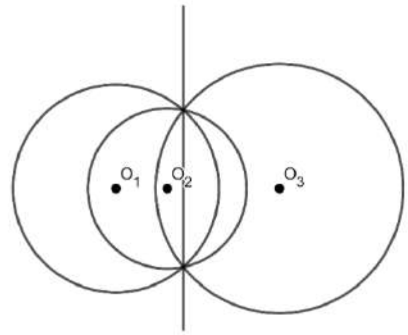

Figura 6

Para terminar a revisão, que tal vermos alguns exercícios sobre o tema?

Exemplo 1 (Teste Ibero – Brasil/2002): Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1, P o ponto de interseção das diagonais AC e BD e M o médio de CD. A circunferência Γ_2 que passa por P e é tangente a CD em M corta BD e AC nos pontos Q e R, respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $BS = DQ$. A paralela a AB por S corta AC em T. Prove $AT = CR$.

Solução: A Figura 7 ilustra a situação do problema. Agora, vejamos como a potência de ponto nos auxilia na hora dos cálculos.

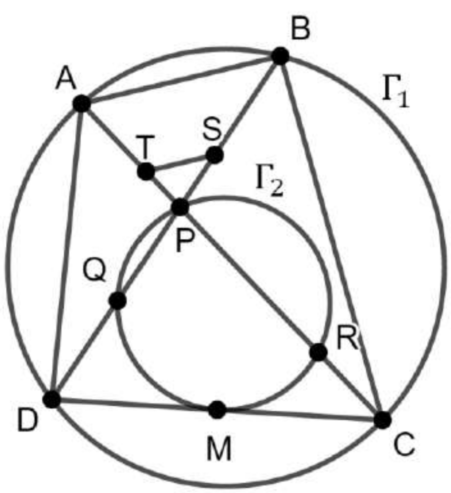

Figura 7

Temos que, analisando potências de ponto relativos a Γ_2, e usando que $DM = MC$:

$$DQ.DP = Pot_{\Gamma_2}D = DM^2 = MC^2 = Pot_{\Gamma_1}C = CR.CP$$

Daí, $DQ.DP = CR.CP$ (1). Por outro lado, $-Pot_{\Gamma_1}P$ é $BP.DP = AP.CP$ (2). Dividindo (1) por (2) e usando que $DQ = BS$, obtemos:

$$\frac{DQ}{BP} = \frac{DQ.DP}{BP.DP} = \frac{CR.CP}{AP.CP} = \frac{CR}{AP} \Rightarrow \frac{BS}{BP} = \frac{CR}{AP} \ (*)$$

Como $TS \parallel AB$, temos, pelo teorema de Tales, que:

$$\frac{BS}{BP} = \frac{AT}{AP} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{CR}{AP} = \frac{AT}{AP} \Rightarrow CR = AT \ \blacksquare$$

Exemplo 2 (IMO 1995): Sejam *A*, *B*, *C*, *D* pontos distintos em uma reta, nesta ordem. As circunferências Γ_1 e Γ_2 de diâmetros *AC* e *BD* se intersectam em *X* e *Y*. *O* é um ponto arbitrário da reta *XY*, não situado em *AD*. *CO* intersecta Γ_1 novamente em *M*, e *BO* intersecta Γ_2 novamente em *N*. Prove que *AM*, *DN* e *XY* são concorrentes.

Solução: A Figura 8 ilustra a situação do problema.

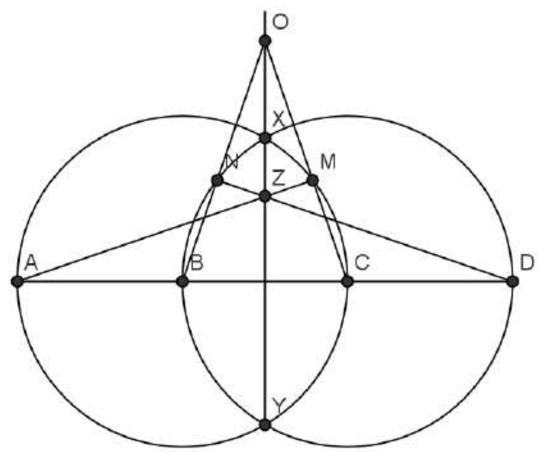

Figura 8

Como queremos provar que *AM*, *DN* e *XY* são concorrentes, devemos achar outra circunferência tal que *AM* e *DN* se tornem eixos radicais. Você já deve estar suspeitando que essa circunferência passa pelo quadrilátero *ANMD*. Portanto, basta provarmos que *ANMD* é inscritível.

Primeiro, observe que, como *O* está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2, então:

$$Pot_{\Gamma_2}(O) = Pot_{\Gamma_1}(O) \Rightarrow ON.OB = OM.OC$$

E com isso *NBCM* é inscritível. Daí, temos que $\angle MNO = \angle MCB$. Assim:

$$\angle DNM = \angle DNO - \angle MNO = 90° - \angle MNO =$$

$$= 90° - \angle MCB = 180° - \angle AMC - \angle MCB = \angle MAC \Rightarrow \angle MND = \angle MAD$$

E com isso *ANMD* é inscritível como queríamos provar. Com isso, seja Γ_3 a circunferência que passa por *ANMD*.

Para acabar, temos que *AM* é o eixo radical de Γ_3 e Γ_1, *DN* é o eixo radical de Γ_3 e Γ_2, e *XY* é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2. Portanto, *AM*, *DN* e *XY* concorrem em *Z*, centro radical de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 ■

Agora que já estamos com as ideias de potência de ponto e eixo radical fresquinhas, vamos começar a estudar algumas aplicações e adaptações, que se mostrarão bem "potentes" para se resolver problemas difíceis (Potente, Potência de Ponto... Sacou? Hã? Tá, melhor continuar...)

3. Distância do Circuncentro ao Incentro – A Relação de Euler

Nosso primeiro lema potente usa a definição de potência de ponto para calcular a distância do incentro ao circuncentro de um triângulo.

Lema Potente 1 (Relação de Euler): Em todo triângulo *ABC*, de circuncentro *O*, incentro *I*, circunraio *R* e inraio *r* é sempre válido que:

$$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

Demonstração: Considere a figura 9. Nela, observamos facilmente que $\angle BAD = \angle BPD$, $\angle IEA = 90°$ e $\angle DBP = 90°$ (PD é diâmetro de Γ). Também, sabemos que $BD = ID$ (1). (Para provar isso, basta provar, usando arrastão, que $\angle BID = \angle IBD = (\angle A + \angle B)/2$).

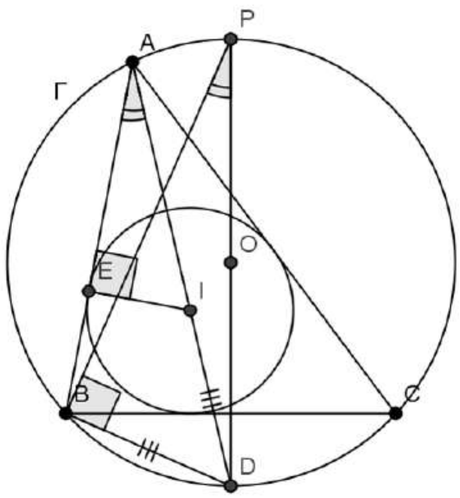

Figura 9

Então, temos que os triângulos *AIE* e *PDB* são semelhantes. Daí:

$$\frac{AI}{IE} = \frac{PD}{BD}$$

Mas $IE = r$, $PD = 2R$ e de (1) $BD = ID$. Substituindo esses valores acima, temos:

$$\frac{AI}{r} = \frac{2R}{ID} \Rightarrow AI.ID = 2Rr \ (*)$$

Só que $AI.ID = -Pot_{\Gamma}(I) = R^2 - OI^2$. Assim, (*) fica:

$$R^2 - OI^2 = 2Rr \Rightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr \ ■$$

Agora veja: $OI^2 \geq 0 \Rightarrow R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r$ e assim obtemos um:

Corolário: Em todo triângulo, o circunraio é maior ou igual ao dobro do inraio, e a igualdade ocorre se, e somente se $O = I$, ou seja, o triângulo *ABC* é equilátero.

Que tal vermos um exemplo de como usamos a Relação de Euler em problemas de olimpíada?

Exemplo 3 (Balcânica/1986): Uma reta passando pelo encentro *I* do triângulo *ABC* intersecta a circunferência circunscrita $\Gamma_1(O, R)$ de *ABC* nos pontos *F* e *G*, e a circunferência inscrita $\Gamma_2(I, r)$ de *ABC* nos pontos *D* e *E*, com *D* entre *I* e *F*. Prove que $DF.EG \geq r^2$ e determine quando ocorre a igualdade.

Solução: Considere a figura 10 relativa ao problema. Temos que:

$$DF.EG = (FI - DI)(IG - IE) = (FI - r)(IG - r)$$

$$= r^2 - r(FI + IG) + \underbrace{FI.IG}_{-Pot_{\Gamma_1}(I)} =$$

$$= r^2 - r.FG - Pot_{\Gamma_1}(I) =$$

$$= r^2 - r.FG - (OI^2 - R^2) =$$

$$= r^2 - r.FG - (R^2 - 2Rr - R^2) = r^2 + r(2R - FG)$$

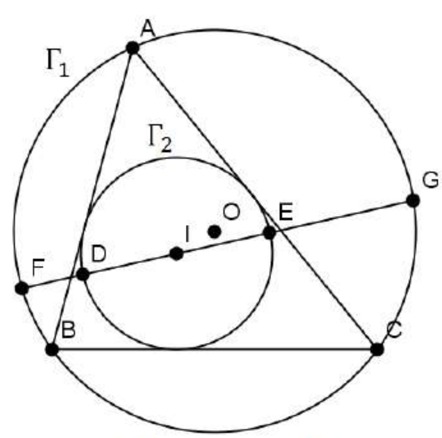

Figura 10

Onde na última passagem utilizamos a relação de Euler. Agora, perceba que, como $FG \leq 2R$ (FG é corda de Γ_1 e a maior corda de uma circunferência é seu diâmetro), temos $r(2R - FG) \geq 0$, donde $DF.EG = r^2 + r(2R - FG) \geq r^2$, como queríamos provar. A igualdade só ocorre quando $r(2R - FG) = 0 \Leftrightarrow FG = 2R$, ou seja, quando FG for diâmetro de Γ_1 ■

4. Pontos Como Circunferências de Raio Zero

Outro lema potente (na verdade não é exatamente um lema, mas sim uma técnica) é o seguinte:

Lema Potente 2: O eixo radical de duas circunferências não concêntricas existe, mesmo quando uma dessas circunferências tem raio zero, ou seja, é composta apenas de seu centro.

Como assim? É até razoável pensar numa circunferência Γ, de centro O e raio zero, como sendo o próprio centro O, mas como se calcula $Pot_\Gamma P$ nesse caso? De mesmo jeito!

$$Pot_\Gamma P = PO^2 - 0^2 = PO^2$$

E porque podemos tomar $R = 0$? Na verdade, o certo é se perguntar: "Por que não podemos?" Solte a sua mente! Faça isso e verás que as soluções se tornam mais soltas, mais livres e mais fáceis. Veja os dois exemplos seguintes para entender do que estou falando:

Exemplo 4: Seja ABC um triângulo escaleno de circuncírculo ω e seja P um ponto interior a ele, distinto do centro de ω. As retas AP, BP, CP intersectam ω pela segunda vez nos pontos D, E, F, respectivamente. As linhas paralelas por P aos lados BC, AC, AB intersectam EF, DF, DE nos pontos K, L, M, respectivamente. Prove que os pontos K, L, M são colineares (Fig. 11).

Solução:

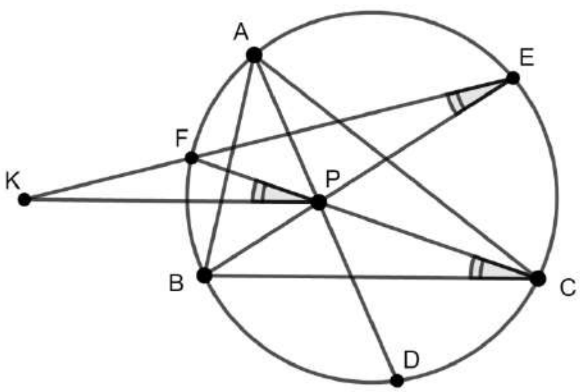

Figura 11

Inicialmente, note que, como $BFEC$ é cíclico, $\angle BCF = \angle FEB$, e como $KP \parallel BC$, $\angle FPK = \angle FCB$. Assim, $\angle FPK = \angle PEK$, e como $\angle FKP = \angle PKE$, temos, pelo caso AA, que $\Delta FPK \sim \Delta PEK$, donde $\frac{KP}{KE} = \frac{KF}{KP} \Rightarrow KP^2 = KF.KE$ $(*)$. Seria muito bom se a relação $(*)$ envolvesse duas circunferências, pois aí saberíamos que K estaria no eixo radical delas... Mas $(*)$ é exatamente isso!

Agora, seja $\omega'(P, 0)$ a "circunferência" de centro P e raio 0. Note que, de $(*)$, $Pot_{\omega'}K = Pot_\omega K$, donde K está no eixo radical l de ω e ω'. Analogamente, L e M estão em l, e por isso K, L, M são colineares ■

Exemplo 5 (Teste Rioplatense – Fortaleza/2013): Num triângulo escaleno ABC de perímetro igual a 4, sabe-se que os comprimentos dos lados AB e AC são, respectivamente, menor que 1 e maior que 1. Sejam X e Y pontos no prolongamento de AB e no segmento AC, respectivamente, tais que os comprimentos de AX e de AY são iguais a 1. Sendo M o ponto de encontro de BC com XY, prove que o perímetro do triângulo ABM ou do triângulo ACM é igual a 2.

Solução: Seja $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. $p = (a + b + c)/2 = 2$ e $AM = d$. Suponha que o excírculo Γ relativo ao vértice A tangencia BC em D, AC em E e AB em F (figura 12). Um cálculo direto usando o Teorema do Bico mostra que $BD = p - c$, $DC = p - b$ e $AE = AF = p = 2$. Suponha sem perdas que M está entre B e D (O outro caso é análogo, basta trocar os pontos B e C de lugar).

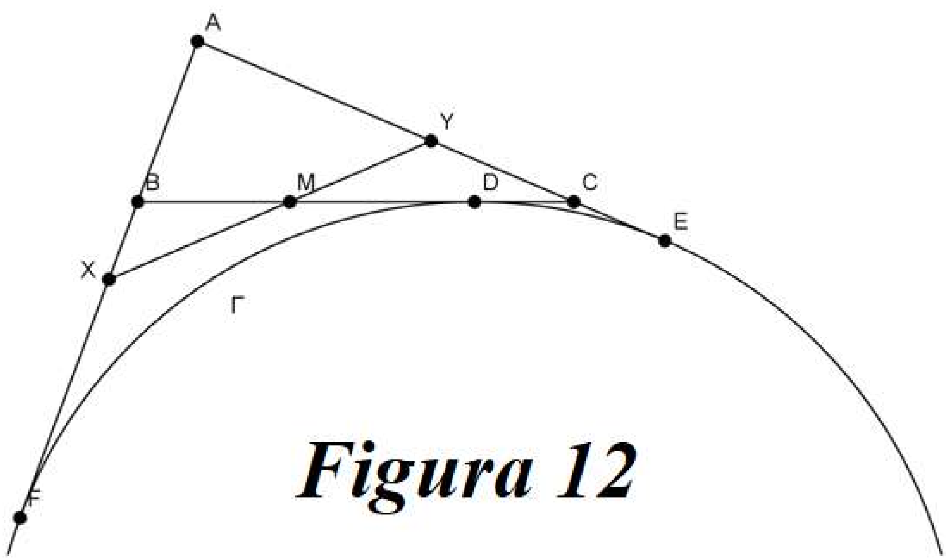

Figura 12

Dessa forma, como $AX = AY = 1$, X e Y são os pontos médios das tangentes AF e AE por Γ. Assim, XY é o eixo radical de Γ e $\Gamma'(A, 0) = A$, donde $MA = MD = d$.

Portanto, o perímetro do triângulo ABM é igual a:

$$AB + BM + AM = AB + (BD - MD) + AM = c + (p - c) - d + d = p = 2$$

Provando assim o resultado ■

5. Generalizando Eixos Radicais: Circunferências k −Radicais

Nosso terceiro lema potente é uma generalização bem interessante do conceito de eixo radical.

Lema Potente 3: Dado um número real k, e duas circunferências não concêntricas Γ, Γ', o lugar geométrico dos pontos P tais que $Pot_{\Gamma}P = k \cdot Pot_{\Gamma}P$ é:

- O eixo radical de Γ e Γ', se $k = 1$ (denotemos tal eixo radical como $\Gamma(1)$)

- Uma circunferência $\Gamma(k)$, coaxial comΓ e Γ', se $k \neq 1$ e Γ e Γ' se intersectam em pelo menos 1 ponto.
- Uma circunferência $\Gamma(k)$, coaxial com Γ e Γ', se Γ e Γ' não se intersectarem e se:

$$k \notin \left(\frac{R^2 + (R')^2 - (OO')^2 - \sqrt{\Delta}}{2(R')^2}, \frac{R^2 + (R')^2 - (OO')^2 + \sqrt{\Delta}}{2(R')^2}\right)$$

$$\Delta = ((R + R')^2 - (OO')^2)((R - R')^2 - (OO')^2)$$

- O conjunto vazio, caso contrário.

Demonstração: Vamos colocar eixos coordenados, de modo que $\Gamma(O, R)$ e $\Gamma'(O', R')$ tenham seus centros no eixo x, isto é, $O = (a, 0)$, $O' = (a', 0)$, com $a \neq a'$. Seja $P = (x, y)$ um ponto variável, como na Figura 13. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

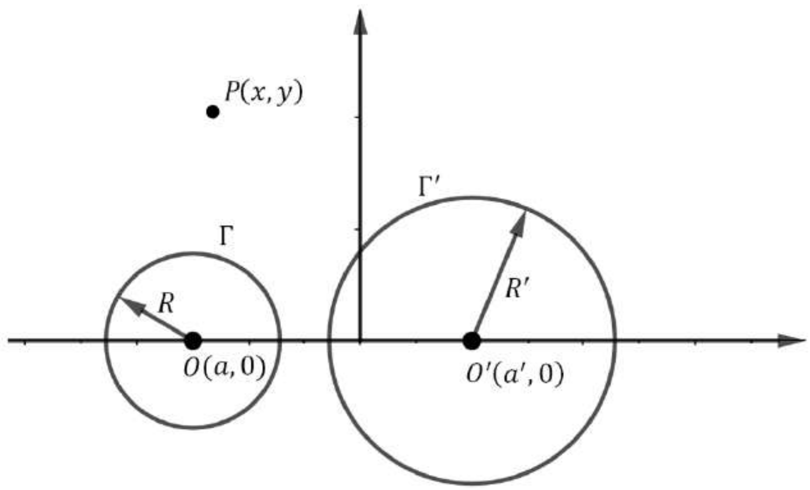

Figura 13

$$Pot_{\Gamma_1}P = k \cdot Pot_{\Gamma_2}P \Leftrightarrow PO^2 - R^2 = k((PO')^2 - (R')^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 0)^2 - R^2 = k((x - a')^2 + (y - 0)^2 - (R')^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - R^2 = k(x^2 - 2a'x + (a')^2 + y^2 - (R')^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)x^2 - 2(a'k - a)x + (k - 1)y^2 + (k(a')^2 - a^2 + R^2 - k(R')^2) = 0 \ (*)$$

Se $k = 1$, então $(*)$ fica:

$$x = \frac{(a')^2 - a^2 + R^2 - (R')^2}{2(a' - a)} = \alpha$$

Ou seja, o lugar geométrico é o eixo radical, que é a reta vertical $x = \alpha$. Note que, pelo fato de que $a' \neq a$, o valor de α está bem definido.

Se $k \neq 1$, então dividindo $(*)$ por $(k-1)$ e simplificando, temos:

$$x^2 - 2\left(\frac{a'k-a}{k-1}\right)x + y^2 + \frac{k(a')^2 - a^2 + R^2 - k(R')^2}{k-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(\frac{a'k-a}{k-1}\right)\right)^2 + y^2 - \left(\frac{a'k-a}{k-1}\right)^2 + \frac{k(a')^2 - a^2 + R^2 - k(R')^2}{k-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(\frac{a'k-a}{k-1}\right)\right)^2 + y^2 = \frac{k^2(R')^2 - k(R^2 + (R')^2 - (a-a')^2) + R^2}{(k-1)^2} = R_k^2$$

Isso, a princípio, descreve uma circunferência, mas precisamos que o numerador do lado direito seja não negativo. Para tanto, extraindo o discriminante Δ e notando que $|a-a'| = OO'$, temos:

$$\Delta = (R^2 + (R')^2 - (OO')^2)^2 - (2RR')^2 = ((R+R')^2 - (OO')^2)((R-R')^2 - (OO')^2)$$

$$= (R + R' + OO')(|R-R'| + OO')(R + R' - OO')(|R-R'| - OO')$$

Se $|R-R'| \leq OO' \leq R+R'$ (ou seja, Γ e Γ' se intersectam), então $\Delta \leq 0$ e temos uma circunferência de centro $O_k = \left(\left(\frac{a'k-a}{k-1}\right), 0\right)$ e raio R_k. Caso contrário, ainda teremos uma circunferência assim, desde que $k \notin \left(\frac{R^2+(R')^2-(OO')^2-\sqrt{\Delta}}{2(R')^2}, \frac{R^2+(R')^2-(OO')^2+\sqrt{\Delta}}{2(R')^2}\right)$. Caso contrário, temos o conjunto vazio. Isso encerra a análise da existência de $\Gamma(k)$. Resta ver se ela é, de fato, coaxial com as outras duas circunferências.

Para demonstrar isso, provaremos que o ponto $A = (\alpha, 0)$ está no eixo radical de Γ e $\Gamma(k)$, pois aí o eixo radical deles será a reta perpendicular ao eixo x passando por $(A, 0)$, que é o eixo radical de Γ e Γ'. Vamos às contas!

$$Pot_{\Gamma}A = Pot_{\Gamma(k)}A \Leftrightarrow OA^2 - R^2 = O_kA^2 - R_k^2 \Leftrightarrow$$

$$(a-\alpha)^2 - R^2 = \left(\left(\frac{a'k-a}{k-1}\right) - \alpha\right)^2 - \frac{k^2(R')^2 - k(R^2 + (R')^2 - (a-a')^2) + R^2}{(k-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2(R')^2 - k(R^2 + (R')^2 - (a-a')^2) + R^2}{(k-1)^2} - R^2 = \left(\left(\frac{a'k-a}{k-1}\right) - \alpha\right)^2 - (a-\alpha)^2$$

Simplificando um pouco mais as contas:

$$LHS = \frac{k^2(R')^2 - k(R^2 + (R')^2 - (a-a')^2) + R^2 - k^2R^2 + 2kR^2 - R^2}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k^2((R')^2 - R^2) - k((R')^2 - R^2 - (a-a')^2)}{(k-1)^2} = \frac{k(k-1)((R')^2 - R^2) + k((a-a')^2)}{(k-1)^2}$$

$$= \frac{k((R')^2 - R^2)}{k-1} + \frac{k(a-a')^2}{(k-1)^2}$$

$$RHS = \left(\left(\frac{a'k - a}{k-1}\right) - \alpha + a - \alpha\right)\left(\left(\frac{a'k - a}{k-1}\right) - \alpha - a + \alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{a'k - a + ak - a - 2(k-1)\alpha}{k-1}\right)\left(\frac{a'k - a - ka + a}{k-1}\right) =$$

$$= \frac{(k(a' + a) - 2a - 2(k-1)\alpha)k(a' - a)}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k^2((a')^2 - a^2) - 2k(aa' - a^2) - 2k(k-1)\alpha(a' - a)}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k^2((a')^2 - a^2) - 2k(aa' - a^2) - k(k-1)((a')^2 - a^2 + R^2 - (R')^2)}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k(k-1)(((R')^2 - R^2) + k(k((a')^2 - a^2) - 2aa' + 2a^2 - (k-1)((a')^2 - a^2))}{(k-1)^2} =$$

$$= \frac{k((R')^2 - R^2)}{k-1} + \frac{k\left(\big(k - (k-1)\big)((a')^2 - a^2) - 2aa' + 2a^2\right)}{(k-1)^2} =$$

$$\frac{k((R')^2 - R^2)}{k-1} + \frac{k((a')^2 - a^2 - 2aa' + 2a^2)}{(k-1)^2} = \frac{k((R')^2 - R^2)}{k-1} + \frac{k(a-a')^2}{(k-1)^2}$$

Como $LHS = RHS$, o resultado segue ■

O legal desse lema é que ele permite provarmos que circunferências são coaxiais, mesmo que não saibamos nada sobre seus centros, nem mesmo se elas tem um ponto em comum. O próximo exemplo ilustra muito bem como isso é feito.

Exemplo 6: Seja ABC um triângulo. Escolhemos pontos B_C, C_B sobre o lado BC, pontos C_A, A_C sobre o lado CA, e pontos A_B, B_A sobre o lado AB de modo que $AA_B = BB_A, BB_C = CC_B$ e $CC_A = AA_C$. Se $(BB_AB_C) \cap (CC_BC_A) = \{A', A''\}$, $(CC_BC_A) \cap (AA_CA_B) = \{B', B''\}$, $(AA_CA_B) \cap (BB_AB_C) = \{C', C''\}$, prove que $(AA'A''), (BB'B''), (CC'C'')$ são coaxiais.

Observação: (XYZ) denota o circuncírculo do triângulo (XYZ).

Solução: Sejam $\omega_A = (AA_BA_C), \omega_B = (BB_CB_A), \omega_C = (CC_AC_B)$, $\Gamma_A = (AA'A'')$, $\Gamma_B = (BB'B'')$, $\Gamma_C = (CC'C'')$, conforme a figura 14. Como um dentre B ou C está dentro de Γ_A (suponhamos sem perdas B), temos que Γ_A e Γ_B se intersectam em X, Y. Devemos mostrar que X, Y estão em Γ_C.

Note que, pelo lema potente 3, Γ_A é o lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$\frac{Pot_{\omega_B}P}{Pot_{\omega_C}P} = \frac{Pot_{\omega_B}A}{Pot_{\omega_C}A} \ (1)$$

Γ_B é o lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$\frac{Pot_{\omega_C}P}{Pot_{\omega_A}P} = \frac{Pot_{\omega_C}B}{Pot_{\omega_A}B} \ (2)$$

Γ_C é o lugar geométrico dos pontos P tais que:

$$\frac{Pot_{\omega_A}P}{Pot_{\omega_B}P} = \frac{Pot_{\omega_A}C}{Pot_{\omega_B}C} \ (3)$$

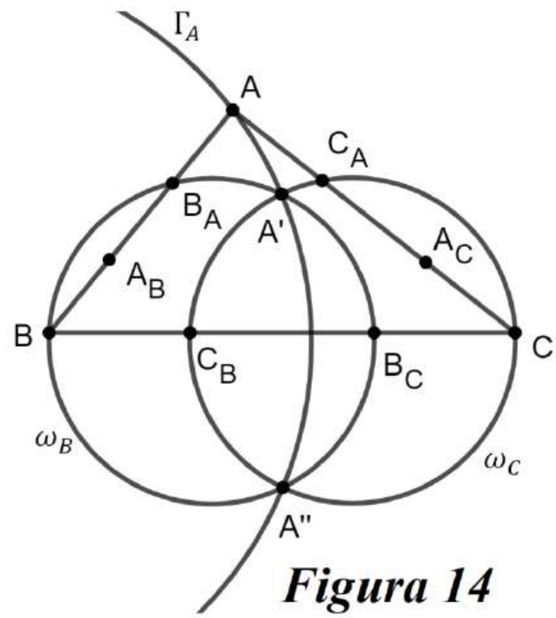

Figura 14

Assim, como X pertence a Γ_A e Γ_B, temos que, de (1) e (2):

$$\frac{Pot_{\omega_A}X}{Pot_{\omega_B}X} = \frac{Pot_{\omega_A}X}{Pot_{\omega_C}X}.\frac{Pot_{\omega_C}X}{Pot_{\omega_B}X} = \frac{Pot_{\omega_A}B}{Pot_{\omega_C}B}.\frac{Pot_{\omega_C}A}{Pot_{\omega_B}A} \ (*)$$

Agora, como $AA_B = BB_A \Rightarrow AB_A = BA_B \Rightarrow AB_A.AB = BA_B.BA \Rightarrow Pot_{\omega_B}A = Pot_{\omega_A}B$ (4). Analogamente, $Pot_{\omega_C}A = Pot_{\omega_A}C$ (5) e $Pot_{\omega_C}B = Pot_{\omega_B}C$ (6). Substituindo (4), (5), (6) em $(*)$, temos:

$$\frac{Pot_{\omega_A}X}{Pot_{\omega_B}X} = \frac{Pot_{\omega_A}B}{Pot_{\omega_C}B}.\frac{Pot_{\omega_C}A}{Pot_{\omega_B}A} = \frac{Pot_{\omega_B}A}{Pot_{\omega_B}C}.\frac{Pot_{\omega_A}C}{Pot_{\omega_B}A} = \frac{Pot_{\omega_A}C}{Pot_{\omega_B}C} \Rightarrow \frac{Pot_{\omega_A}X}{Pot_{\omega_B}X} = \frac{Pot_{\omega_A}C}{Pot_{\omega_B}C}$$

De (3), temos que X está em Γ_C. Analogamente, Y está em Γ_C. Portanto, $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ são coaxiais ■

6. Teorema dos Cinco Eixos Radicais

E para finalizar, vamos demonstrar aqui nosso último lema potente, que poderia ser usado para resolver o problema 6 da OBM/2019 (Nível 3), problema esse que será o exemplo resolvido dessa seção.

Lema Potente 4 (Teorema dos Cinco Eixos Radicais): Seja $ABCDE$ um pentágono convexo. Sejam $A_1 = BD \cap CE$, $B_1 = CE \cap DA$, $C_1 = DA \cap EB$, $D_1 = EB \cap AC$, $E_1 = AC \cap BD$. Sejam ainda $A_2 = (ABD_1) \cap (AEC_1)$ $(A_2 \neq A)$, $B_2 = (BCE_1) \cap (BAD_1)$ $(B_2 \neq B)$, $C_2 = (CDA_1) \cap (CBE_1)$ $(C_2 \neq C)$, $D_2 = (DEB_1) \cap (DCA_1)$ $(D_2 \neq D)$, $E_2 = (EAC_1) \cap (EDB_1)$ $(E_2 \neq E)$, conforme a figura 15. Então, as cinco retas $AA_2, BB_2, CC_2, DD_2, EE_2$ são concorrentes.

Demonstração: A demonstração aqui é a que aparece em [3].

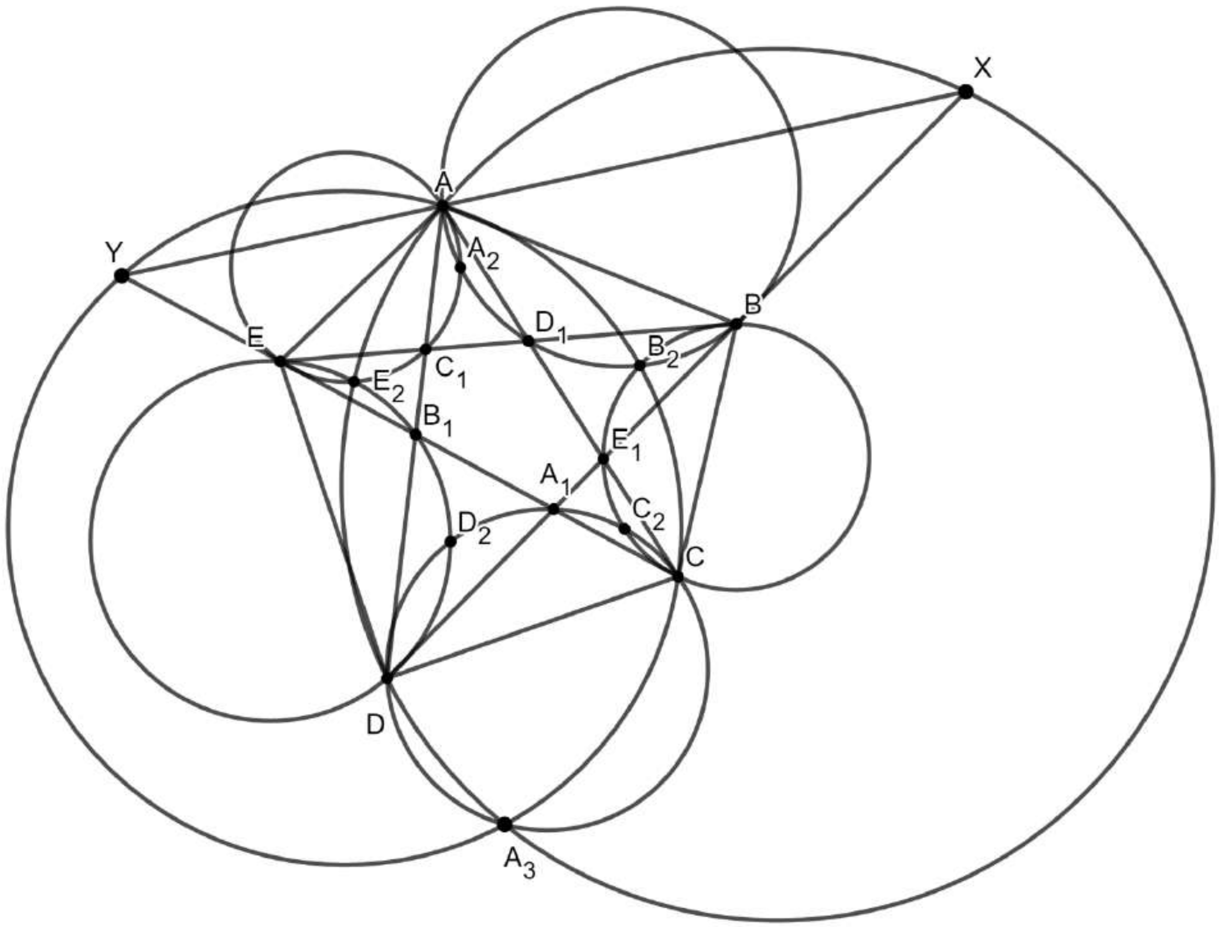

Figura 15

Vamos demonstrar que EE_2, AA_2, BB_2 são concorrentes. Se provarmos isso, por simetria, as outras concorrências também ocorrerão, e assim temos o nosso resultado. Para demonstrar isso, basta provarmos que BB_2E_2E é cíclico, pois aí EE_2, AA_2, BB_2 concorrerão no centro radical de $(BB_2E_2E), (BB_2A_2A), (AA_2E_2E)$. Suponha que $(AE_2D), (AB_2C)$ se intersectam novamente em A_3, que BD intersecta (AE_2D) novamente em X e que CE intersecta (AB_2C) novamente em Y, conforme a Figura 15.

- DA_1CA_3 é cíclico.

Como AE_2DA_3 é cíclico, $\angle DA_3A = 180° - \angle DE_2A$, e olhando ΔAE_2D, $180° - \angle DE_2A = \angle E_2AD + \angle E_2DA = \angle E_2AC_1 + \angle E_2DB_1$, e como AC_1E_2E, DB_1E_2E são cíclicos, temos $\angle E_2AC_1 + \angle E_2DB_1 = \angle E_2EC_1 + \angle E_2EB_1 = \angle C_1EB_1 = \angle BEA_1$. Logo, $\angle DA_3A = \angle BEA_1$ (1) e, analogamente, $\angle CA_3A = \angle EBA_1$ (2). Somando $(1), (2)$ e olhando ΔEBA_1:

$$\angle DA_3C = \angle DA_3A + \angle CA_3A = \angle BEA_1 + \angle EBA_1 = 180° - \angle BA_1E = 180° - \angle DA_1C$$

E assim DA_1CA_3 é cíclico.

- XBE_2E e YEB_2B são cíclicos.

Basta nota que:

$$\angle BXE_2 = \angle DXE_2 \overset{XAE_2D\ cic.}{\cong} \angle DAE_2 = \angle C_1AE_2 \overset{AC_1E_2E\ cic.}{\cong} \angle C_1EE_2 = \angle BEE_2$$

E assim XBE_2E é cíclico. Analogamente, YEB_2B é cíclico.

- X, A, Y são colineares.

Para demonstrar isso, provaremos que $\angle XAY = 180°$. Para tanto, precisamos de alguns cálculos.

$$\angle XAD \overset{XAE_2D\ cic.}{\cong} \angle XE_2D = 180° - \angle E_2XD - \angle E_2DX \overset{XAE_2D\ cic.}{\cong} 180° - \angle E_2AD - \angle E_2DB =$$

$$= 180° - \angle E_2AC_1 - (\angle E_2DA + \angle ADB) \overset{AC_1E_2E\ cic.}{\cong} 180° - \angle E_2EC_1 - \angle E_2DA - \angle ADB =$$

$$= 180° - \angle E_2EC_1 - \angle E_2DB_1 - \angle ADB \overset{EE_2B_1D\ cic.}{\cong} 180° - \angle E_2EC_1 - \angle E_2EB_1 - \angle ADB =$$

$$= 180° - (\angle E_2EC_1 + \angle E_2EB_1) - \angle ADB = 180° - \angle C_1EB_1 - \angle ADB =$$

$$= 180° - \angle BEC - \angle ADB$$

Analogamente, $\angle YAC = 180° - \angle DBE - \angle ACE$. Com isso:

$$\angle XAY = \angle XAD + \angle YAC - \angle DAC =$$

$$= (180° - \angle BEC - \angle ADB) + (180° - \angle DBE - \angle ACE) - \angle DAC =$$

$$= 360° - (\angle DAC + \angle EBD + \angle ACE + \angle BDA + \angle CEB) = 360° - 180° = 180°$$

Uma vez que a soma dos ângulos nas “pontas” na estrela $ADBEC$ é 180° (tente provar isso!).

- $YXBE$ é cíclico.

Para demonstrar isso, note que $\angle YXB = \angle AXD = 180° - \angle AE_2D$, pois AE_2DX é cíclico. Além disso, olhando o triângulo AE_2D, $180° - \angle AE_2D = \angle E_2AD + \angle E_2DA = \angle E_2AC_1 + \angle E_2DB_1$, e como AC_1E_2E, DB_1E_2E são cíclicos, temos $\angle E_2AC_1 + \angle E_2DB_1 = \angle E_2EC_1 + \angle E_2EB_1 = \angle C_1EB_1 = \angle BEA_1 = 180° - \angle YEB$. Assim, $\angle YXB + \angle YEB = 180°$, donde $YXBE$ é cíclico.

Para finalizar, como XBE_2E, YEB_2B e $YXBE$ são cíclicos, temos que o hexágono $YBBB_2E_2E$ é cíclico. Portanto, BB_2E_2E é cíclico, e o lema está provado ■

Curiosidade: O teorema dos 5 eixos radicais não pode ser diretamente generalizado para um $n-$ágono $A_1A_2 \ldots A_n$ com uma "estrela" formada pelas interseções $A_iA_{i+2} \cap A_{i+1}A_{i+3}$, $i = 1, \ldots, n$ (índices módulo n), mas uma generalização possível é a seguinte: se $(n-3)$ dos n eixos radicais construídos assim concorrerem, então os outros 3 concorrem. Se o leitor quiser mais detalhes sobre isso, a referência [4] explica, por meio de projetividades, como isso pode ser feito.

Exemplo 7 (OBM/2019): Seja $A_1A_2A_3A_4A_5$ um pentágono convexo inscritível, satisfazendo $\angle A_i + \angle A_{i+1} > 180°$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (índices módulo 5 em todo o problema). Defina B_i como a interseção das retas $A_{i-1}A_i$ e $A_{i+1}A_{i+2}$, formando uma estrela. Os circuncírculos dos triângulos $A_{i-1}B_{i-1}A_i$ e $A_iB_iA_{i+1}$ se cortam novamente em $C_i \neq A_i$, e os circuncírculos dos triângulos $B_{i-1}A_iB_i$ e $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ se cortam novamente em $D_i \neq B_i$. Prove que as dez retas A_iC_i, B_iD_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, têm um ponto em comum.

Solução: Ao analisarmos a figura 16, nem precisa dizer que o Teorema dos Cinco Eixos Radicais é perfeito para essa situação. De fato, ao olharmos o pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ (que é convexo, pela condição $\angle A_i + \angle A_{i+1} > 180°$), temos que, pelo Lema Potente 4, as cinco retas B_iD_i, $i = 1,2,3, \ldots ,5$, concorrem em um ponto P. Resta mostrar que as retas A_iC_i também passam por esse ponto P.

Defina Γ_i como sendo a circunferência $(A_{i-1}B_{i-1}A_i)$, para $i = 1,2,3, \ldots ,5$, e denote $X = B_1D_1 \cap A_1A_2$. Como $B_1D_1A_1B_5$ é cíclico, $XD_1.XB_1 = XA_1.XB_5$, e como $B_1D_1A_2B_2$ é cíclico, $XD_1.XB_1 = XA_2.XB_2$. Assim, $XA_1.XB_5 = XA_2.XB_2$, donde $Pot_{\Gamma_1}X = Pot_{\Gamma_3}X$. Além disso, como $A_5A_1A_2A_3$ é cíclico, temos $B_1A_5.B_1A_1 = B_1A_3.B_1A_2$, donde $Pot_{\Gamma_1}B_1 = Pot_{\Gamma_3}B_1$. Com isso, XB_1 é o eixo radical de Γ_1 e Γ_3, e como $P \in XB_1$, temos $Pot_{\Gamma_1}P = Pot_{\Gamma_3}P$.

Procedendo de maneira cíclica, obtemos $Pot_{\Gamma_1}P = Pot_{\Gamma_3}P = Pot_{\Gamma_5}P = Pot_{\Gamma_2}P = Pot_4P$, e como $Pot_{\Gamma_1}P = Pot_{\Gamma_2}P$, P está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2, que é a reta A_1C_1. Portanto, $P \in A_1C_1$ e, de modo análogo, $P \in A_iC_i$, $i = 2,3, \ldots ,5$, terminando a resolução do problema ■

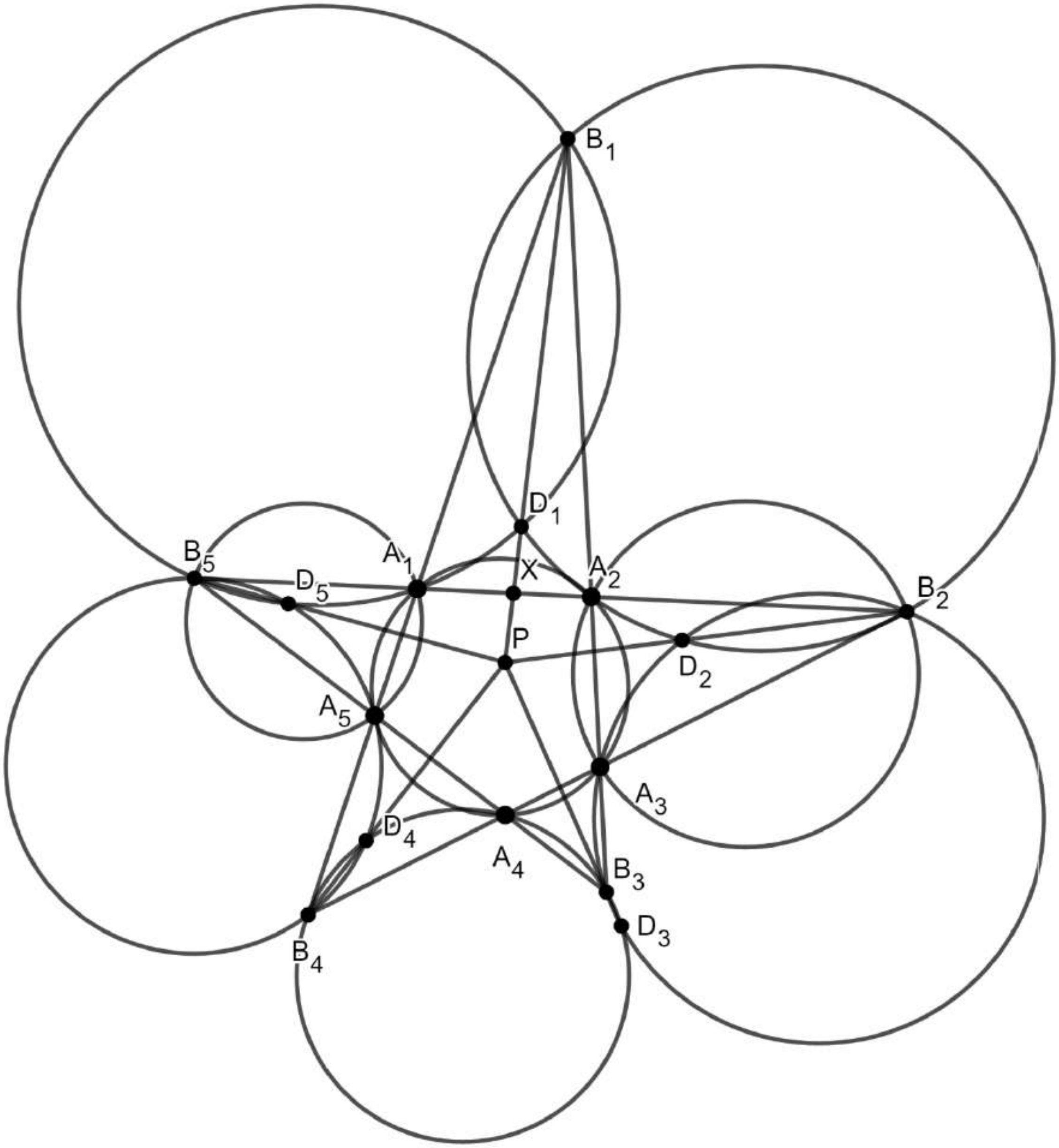

Figura 16

7. Problemas

Agora que aprendemos novas formas de se enxergar potência de ponto e eixo radical, é hora de praticarmos o que aprendemos. Os problemas a seguir estão classificados de acordo com os assuntos que vimos aqui, mas não estreite sua mente! Tente, sempre que possível, encontrar uma solução, mesmo que ela não seja tão de acordo com o assunto. O importante é resolver tudo!

7.1. Definições Básicas - Problemas

Problema 1 (OBM/1998): Sobre os lados AB e AC de um triângulo acutângulo ABC são construídos, exteriormente ao triângulo, semicírculos tendo estes lados como diâmetros. As retas contendo as alturas relativas aos lados AB e AC cortam esses semicírculos nos pontos P e Q. Prove que $AP = AQ$.

Problema 2: Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo $\angle A$ e a mediana relativa a BC intersectam este lado em pontos distintos O e M, respectivamente. O círculo circunscrito ao triângulo AOM intersecta os lados AB e AC em E e F, respectivamente. Prove que $BE = CF$.

Problema 3: Dois círculos Γ_1 e Γ_2 intersectam-se em P, Q. Uma reta passando por P intersecta Γ_1 e Γ_2 novamente em A e B, respectivamente. Se X é o ponto médio de AB e a reta que passa por Q e X intersecta Γ_1 e Γ_2 novamente em Y e Z, respectivamente, prove que X é o ponto médio de YZ.

Problema 4: Seja C um ponto sobre o semicírculo de diâmetro AB e seja D o ponto médio do arco AC. Se E é a projeção de D sobre BC e F é a interseção de AE com o semicírculo, prove que BF bissecta o segmento DE.

Problema 5: Seja P um ponto no interior de um círculo tal que existem três cordas que passam por P e têm o mesmo comprimento. Prove que P é o centro do círculo.

Problema 6 (IMO/2006): Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior de ABC satisfaz:

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Prove que $AP \geq AI$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, $P = I$.

Problema 7: Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos concêntricos, com Γ_2 no interior de Γ_1. Partindo de um ponto A pertencente a Γ_1, é desenhada uma tangente AB a Γ_2 ($B \in \Gamma_2$). Seja C o segundo ponto de interseção de AB com Γ_1, e D o ponto médio de AB. Uma reta passando por A intersecta Γ_2 em E e F de tal maneira que as mediatrizes de DE e CF se intersectam em um ponto M sobre AC. Determine a razão $\frac{AM}{MC}$.

Problema 8 (Lista IMO/2008): Seja Γ o circuncírculo do quadrilátero cíclico $ABCD$ com a propriedade de que as semirretas DA e CB cortam-se em um ponto E para o qual $CD^2 = AD.ED$. Seja $F \neq A$ a interseção de Γ com a reta perpendicular a DE que passa por A. Prove que $AD = CF$ se, e somente se, o circuncentro de ABE pertence a DE.

Problema 9 (IMO Shortlist/2015 – G1): Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H. Seja G o ponto tal que $ABGH$ é um paralelogramo. Seja I o ponto na reta GH tal que AC bissecta o segmento HI. Suponha que a reta AC intersecta o circuncírculo do triângulo GCI em $J \neq C$. Prove que $IJ = AH$.

Problema 10 (IMO/2009): Seja *ABC* um triangulo com circuncentro *O*. Sejam *P* e *Q* pontos no interior dos lados *AC* e *AB* respectivamente. Sejam *K*, *L* e *M* os pontos médios dos segmentos *BP*, *CQ* e *PQ* respectivamente, e Γ o círculo que passa por *K*, *L* e *M*. Suponha que a reta *PQ* é tangente ao círculo Γ. Prove que $OP = OQ$.

Problema 11 (IMO/2008): Seja *H* o ortocentro do triângulo acutângulo *ABC*. A circunferência Γ_A com centro no ponto médio de *BC* e que passa por H intersecta a reta *BC* em A_1 e A_2. Os pontos B_1, B_2, C_1 e C_2 são definidos analogamente. Prove que os seis pontos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 são concíclicos.

Problema 12 (Banco Cone Sul/2002): Seja *ABCD* um quadrilátero inscritível e *E* a interseção das diagonais *AC* e *BD*. Se *F* é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1 e Γ_2 circunscritas a *FAC* e a *FBD* se intersectam novamente em *G*, mostre que *E*, *F*, *G* são colineares.

Problema 13: Se a distância entre os centros de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 é maior do que a soma de seus raios, as circunferências têm quatro tangentes em comum. Prove que os pontos médios desses quatro segmentos são colineares.

Problema 14 (USAMO/1997): Seja *ABC* um triângulo. Construa triângulos isósceles *BCD*, *CAE* e *ABF* externamente a *ABC* de bases *BC*, *CA* e *AB*, respectivamente. Prove que as retas que passam por *A*, *B*, *C* e são perpendiculares a *EF*, *FD* e *DE*, respectivamente, são concorrentes.

Problema 15 (USAMO/1990): Um triângulo acutângulo *ABC* é dado no plano. O círculo com diâmetro *AB* intersecta a altura *CC´* e seu prolongamento nos pontos *M* e *N*, e o círculo com diâmetro *AC* intersecta a altura *BB´* e seu prolongamento em *P* e *Q*. Mostre que os pontos *M*, *N*, *P*, *Q* são concíclicos.

Problema 16 (Ibero/1999): Um triângulo acutângulo *ABC* está inscrito numa circunferência de centro *O*. As alturas do triângulo são *AD*, *BE* e *CF*. A reta *EF* intersecta essa circunferência nos pontos *P* e *Q*.

(a) Prove que *AO* é perpendicular a *PQ*;

(b) Se *M* é o ponto médio de *BC*, prove que $AP^2 = 2AD.OM$;

Problema 17 (Índia): Seja *ABCD* um paralelogramo. Um círculo contido em *ABCD* tangencia as retas *AB* e *AD* e intersecta *BD* em *E* e *F*. Mostre que existe um círculo passando por *E*, *F* e tangente a *BC* e *CD*.

Problema 18 (Rioplatense/2002): Dado um quadrilátero *ABCD*, constroem-se triângulos isósceles *ABK*, *BCL*, *CDM* e *DAN*, com bases sobre os lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, tais que *K*, *L*, *M* e *N* sejam pontos distintos, três a três não colineares. A perpendicular à reta *KL* traçada por *B* intersecta a perpendicular à reta *LM* traçada por *C* no ponto *P*; a perpendicular à reta *MN* traçada por *D* intersecta a perpendicular à reta *NK* traçada por *A* no ponto *Q*. Demonstre que, se *P* e *Q* são distintos, então *PQ* é perpendicular a *KM*.

Problema 19 (USAMO/2009): Dados dois círculos ω_1 e ω_2 que se intersectam em *X* e *Y*, seja l_1 uma reta que passa pelo centro de ω_1, intersectando ω_2 nos pontos *P* e *Q*, e seja l_2 uma reta que passa pelo centro de ω_2 intersectando ω_1 nos pontos *R* e *S*. Prove que se os pontos *P*, *Q*, *R*, *S* estão numa circunferência, então o centro dessa circunferência está na reta *XY*.

Problema 20 (IMO Shortlist/2011 – G2): Seja $A_1A_2A_3A_4$ um quadrilátero que não é inscritível. Sejam O_i e r_i o circuncentro e o circunraio do triângulo $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ (os índices são tomados módulo 4). Prove que:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{O_iA_i^2 - r_i^2} = 0$$

Problema 21 (IMO Shortlist/2009 – G2): Dado o trapézio *ABCD*, com $AB \parallel CD$, assuma que existam pontos *E* sobre a reta *BC*, externo ao segmento *BC*, e *F* interno ao segmento *AD*, tais que $\angle DAE = \angle CBF$. Denote por *I* o ponto de interseção de *CD* e *EF*, e por *J* o ponto de interseção de *AB* e *EF*. Seja *K* o ponto médio do segmento *EF*. Assuma que ele não se encontra sobre a reta *AB* Prove que *I* pertence ao circuncírculo de *ABK* se, e somente se, *K* pertence ao circuncírculo de *CDJ*.

Problema 22 (IMO Shortlist/2008 – G3): Seja *ABCD* um quadrilátero convexo e seja *P* e *Q* pontos em *ABCD* tais que *PQDA* e *QPBC* são inscritíveis. Suponha que exista um ponto *E* no segmento PQ tal que $\angle PAE = \angle QDE$ e $\angle PBE = \angle QCE$. Prove que *ABCD* é inscritível.

Problema 23 (IMO Shortlist/2009 – G4): Seja *ABC* um triângulo acutângulo. Sejam *BE* e *CF* alturas do triângulo *ABC*, com *E* sobre *AC* e *F* sobre *AB*. Dois círculos passam por *A* e *F* e tangenciam a reta *BC* respectivamente nos pontos *P* e *Q*, de modo que *B* está entre *C* e *Q*. Prove que as retas *PE* e *QF* se cortam num ponto que está no circuncírculo de *AEF*.

Problema 24 (IMO/2012): Seja *ABC* um triângulo com $\angle BCA = 90°$, e seja *D* o pé da altura relativo ao vértice *C*. Seja *X* um ponto no interior do segmento *CD*. Seja *K* o ponto sobre o segmento *AX* tal que $BK = BC$, e seja *L* o ponto sobre o segmento *BX* tal que $AL = AC$. Seja *M* o ponto de interseção de *AL* e *BK*. Prove que $MK = ML$.

Problema 25 (IMO Shortlist/2011 – G3): Seja *ABCD* um quadrilátero convexo cujos lados *AD* e *BC* não são paralelos. Suponha que os círculos com diâmetros *AB* e *CD* se encontram em pontos *E* e *F* dentro de *ABCD*. Seja ω_E a circunferência que passa pelos pés das perpendiculares de *E* às retas *AB*, *BC* e *CD*. Seja ω_F a circunferência que passa pelos pés das perpendiculares de *F* às retas *CD*, *DA* e *AB*. Prove que o ponto médio do segmento *EF* está na reta que liga os dois pontos de interseção de ω_E e ω_F.

Problema 26 (IMO Shortlist/2011 – G5): Seja *ABC* um triângulo com incentro *I* e circuncírculo ω. Sejam *D* e *E* as outras interseções de ω com *AI* e *BI*, respectivamente. A corda *DE* encontra *AC* no ponto *F*, e *BC* no ponto *G*. Seja *P* o ponto de interseção da paralela a *AD* por *F* e da paralela a *BE* por *G*. Suponha que as tangentes a ω em *A* e *B* se encontram em *K*. Prove que as retas *AE*, *BD* e *KP* são paralelas ou concorrentes.

Problema 27 (IMO Shortlist/2017 – G4): No triângulo ABC, seja ω o $A-$excírculo. Sejam D, E, F os pontos onde ω tangencia BC, CA, AB, respectivamente. O circuncírculo do triângulo AEF intersecta a reta BC em P e Q. Seja M o ponto médio de AD. Prove que o circuncírculo do triângulo MPQ é tangente a ω.

Problema 28 (IMO Shortlist/2017 – G5): Seja $ABCC_1B_1A_1$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, e suponha que os segmentos AA_1, BB_1, CC_1 possuem a mesma mediatriz. As diagonais AC_1 e A_1C se intersectam em D. Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC. ω intersecta o circuncírculo do triângulo A_1BC_1 novamente em E. Prove que as retas BB_1 e DE se intersectam em ω.

7.2 Distância do Circuncentro ao Incentro – A Relação de Euler - Problemas

Problema 29: Seja ABC um triângulo de circuncentro O, ex-incentros I_A, I_B, I_C, circunraio R e ex-raios r_A, r_B, r_C. Demonstre que:

$$OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A, OI_B^2 = R^2 + 2Rr_B, OI_C^2 = R^2 + 2Rr_C$$

Problema 30 (OIMU/2013): Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O_1 e raio R, e circunscrito a outra circunferência de centro O_2 e raio r. Mostre que:

$$O_1O_2^2 = R^2 - 2Rr + r(2r - r_1 - r_2)$$

Onde r_1, r_2 são os inraios dos triângulos ABC e ADC, respectivamente.

Problema 31 (Cone Sul/2008): Seja ABC um triângulo isósceles de base AB. Uma semicircunferência Γ com centro no segmento AB é tangente aos lados iguais AC e BC. Considere uma reta tangente a Γ que intersecta os segmentos AC e BC em D e E, respectivamente. Suponha que a reta perpendicular a AC por D e a reta perpendicular a BC por E se intersectam em um ponto P interior ao triângulo ABC. Seja Q o pé da perpendicular à reta AB que passa por P. Demonstre que:

$$\frac{PQ}{PC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$$

Problema 32 (Rioplatense/2013): Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cíclico com todos os seus lados distintos. Sejam I e J os incentros dos triângulos ABC e ADC, respectivamente. Prove que $ABCD$ é circunscritível se, e somente, o quadrilátero $BIJD$ é cíclico.

7.3. Pontos Como Circunferências de Raio Zero – Problemas

Problema 33: No triângulo acutângulo ABC, $\angle B > \angle C$. Seja M o ponto médio de BC, e sejam D e E os pés das alturas relativas a C e a B, respectivamente. K e L são os pontos médios de ME e MD, respectivamente. Se KL intersecta a reta paralela a BC por A em T, prove que $TA = TM$.

Problema 34 (IMO Shortlist/2009 – G3): Seja ABC um triângulo. O incírculo do ABC toca os lados AB e AC nos pontos Z e Y, respectivamente. Seja G o ponto onde as linhas BY e CZ se encontram, e seja R e S pontos de forma que os dois quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ sejam paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Problema 35: Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos não sobrepostos. A, C estão em Γ_1 e B, D estão em Γ_2 de tal forma que AB é tangente comum externa aos dois círculos, e CD é tangente comum interna aos dois círculos. AC e BD se encontram em E. F é um ponto em Γ_1, a reta tangente a Γ_1 em F encontra a mediatriz de EF em M. MG é uma reta tangente a Γ_2 em G. Prove que $MF = MG$.

7.4. Generalizando Eixos Radicais: Circunferências k −Radicais – Problemas

Problema 36 (Ibero/1999): Dadas duas circunferências M e N, dizemos que M bissecta N se a corda comum a M e N é um diâmetro de N. Considere duas circunferências fixas C_1 e C_2 não concêntricas.

(a) Prove que existem infinitas circunferências B tais que B bissecta C_1 e C_2.

(b) Determine o lugar geométrico dos centros de B.

Problema 37: Sejam $\Gamma_1(O_1, R_1)$ e $\Gamma_2(O_2, R_2)$ duas circunferências não concêntricas. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P tais que $PO_1^2 + R_1^2 = PO_2^2 + R_2^2$ é uma reta simétrica ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio de O_1O_2.

Problema 38 (European Mathematical Cup/2016): Sejam C_1, C_2 circunferências que se intersectam em X, Y. Sejam A, D pontos em C_1 e B, C pontos em C_2, tais que A, X, C são colineares e B, X, D são colineares. A tangente a C_1 por D intersecta BC em P e intersecta a tangente a C_2 por B em R. A tangente a C_2 por C intersecta AD em Q e a tangente a C_1 por A em S. Seja W a intersecção de AD com a tangente a C_2 por B e Z a intersecção de BC com a tangente a C_1 por A. Prove que $(WZY), (RSY), (PQY)$ são coaxiais

7.5. Teorema dos Cinco Eixos Radicais - Problemas

Problema 39 (Variante do Teorema dos 5 Eixos Radicais): Seja $ABCDE$ um pentágono convexo. Sejam $A_1 = BD \cap CE, B_1 = CE \cap DA$, $C_1 = DA \cap EB$, $D_1 = EB \cap AC, E_1 = AC \cap BD$. Defina $\omega_A = (B_1AE_1)$, $\omega_B = (C_1BA_1)$, $\omega_C = (D_1CB_1)$, $\omega_D = (E_1DC_1)$ e $\omega_E = (A_1ED_1)$. Prove que os eixos radicais de ω_A, ω_B, de ω_B, ω_C, de ω_C, ω_D, de ω_D, ω_E e de ω_E, ω_A são concorrentes.

Problema 40: Sob as mesmas condições do Problema 6 da OBM/2019 (Exemplo 7), demonstre que existe uma homotetia centro P e razão negativa, que leva A_i em C_i, $i = 1,2,3, \dots ,5$ (com isso, segue diretamente que $C_1C_2C_3C_4C_5$ é cíclico),

8. Bibliografia

[1] H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, Geometry Revisited, The Mathematical Association of America, 1967.

[2] Yuri G. Lima, Potência de Ponto, Eixo Radical, Centro Radical e Aplicações, acessado em 17/01/2020, disponível em https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eixos-2.pdf

[3] https://artofproblemsolving.com/community/c6h1813119p12086815, Acessado em 17/01/2020.

[4] J. C. Fisher, E. M. Schroder, J. Stevens, Circle Incidence Theorems, Forum Geometricorum, Volume 15 (2015) 211–228. Disponível no link http://forumgeom.fau.edu/FG2015volume15/FG201522.pdf, Acessado em 18/01/2020.

[5] G. Nicollier, Two Six-Circle Theorems for Cyclic Pentagons, Forum Geometricorum, Volume 16 (2016) 347–354. Disponível no link http://forumgeom.fau.edu/FG2016volume16/FG201644.pdf, Acessado em 18/01/2020.