Como cobrir tabuleiros

Para um aluno olímpico de todos os níveis é comum encontrar questões de olimpíadas envolvendo tabuleiros. Entre as questões de tabuleiros, há uma frequência grande de questões que perguntam sobre a possibilidade de cobrir um determinado tabuleiro com peças específicas. Este material ajudará o aluno a resolver tais tipos de questões de cobertura de tabuleiros.

1. Introdução:

Nestes tipos de questões, o primeiro passo é dividir a área total do tabuleiro pela área da peça ou das peças envolvidas. A partir do resultado da divisão, temos alguns casos e subcasos:

1. Se a divisão não for exata, ou seja, se houver algum resto, então não será possível cobrir o tabuleiro e a questão se encerra.

2. Caso a divisão seja exata, então teremos que analisar mais. Felizmente, nesses casos de divisão exata, na grande maioria dos casos, temos que ocorre um dos subcasos abaixo:

    2.1. É possível cobrir o tabuleiro. Nesse caso, devemos mostrar uma cobertura correta. Em geral, acontece um dos subcasos abaixo:

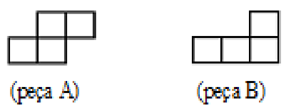
        2.1.1. Quando o tabuleiro é pequeno: a saída é sair fazendo no braço. Nesse caso, só a experiência e/ou a criatividade resolvem. Por sorte, esses casos são casos pequenos e simples.

        2.1.2. Quando o tabuleiro é maior: quase sempre, a solução envolve fazer um tabuleiro pequeno e sair "replicando o tabuleiro pequeno" por todo o tabuleiro maior. Por exemplo, se temos um tabuleiro 2012 x 2013, muito provavelmente, haverá uma forma de cobrir um tabuleiro 2 x 3 ou 4 x 3 e depois sair replicando o 2 ou o 4 por todo o lado 2012 e o 3 por todo o lado 2013, afinal 2 e 4 são divisores de 2012 e 3 é divisor de 2013.

    2.2. Não é possível cobrir o tabuleiro. Nesse caso, devemos procurar alguma coloração especial ou algumas colorações especiais que resolvam o nosso problema. Nesse artigo, veremos algumas das principais colorações. Para quem já estudou invariantes, no fundo, o que faremos é procurar elas pelo tabuleiro em questão.

Para a melhor compreensão do assunto, vejamos a resolução de uma questão sobre o tema:

1) (Seletiva Fortaleza – Rioplatense/2012 – Nível A) Benjamim tem 25 peças A e 25 peças B, cujos formatos estão mostrados ao lado.



Com as 50 peças, Benjamim pretende cobrir um tabuleiro completamente, sem deixar buracos e nem fazer sobreposições. Ele sabe que cada quadradinho da peça A e que cada quadradinho da peça B tem 1cm² de área. Sabendo que ele pode girar as peças do jeito que ele quiser, podendo inclusive "inverter" qualquer peça, pergunta-se:

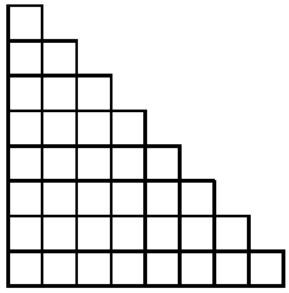
a) Se o tabuleiro for 8×8 (ou seja, ele tiver 8 cm de comprimento por 8 cm de largura), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

b) Se o tabuleiro for 8×9, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

c) Se o tabuleiro for 9×9, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

d) Se todas as casas acima de uma diagonal do tabuleiro $8 x 8$ forem retiradas (veja figura ao lado), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

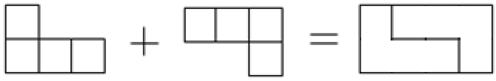
Observação: Note que as duas peças abaixo são as mesmas, pois uma foi invertida para obter a outra.

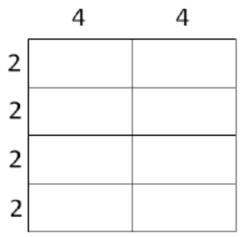


Solução:

a) A princípio, temos que: $\dfrac{\acute{a}rea\,tabuleiro}{\acute{a}rea\;peça(A\;ou\;B)}=\dfrac{8\,x\,8}{4\,x\,1}=\dfrac{64}{4}=16$.

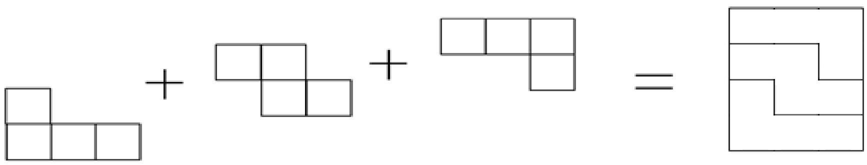
Como a divisão deu exata, não podemos, ainda, dizer se é possível cobrir o tabuleiro com tais peças ou não é. No caso deste item, podemos, inicialmente, pensar em usar duas peças B para formar um retângulo 2 x 4:

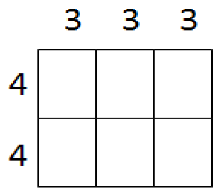




E, em seguida. sair replicando tal retângulo 2 x 4 para cobrir totalmente o tabuleiro 8 x 8, conforme mostrado na figura ao lado:
Portanto, Benjamim pode cobrir todo o tabuleiro 8 x 8.

b) A princípio, temos que: $\dfrac{\acute{a}rea\,tabuleiro}{\acute{a}rea\;peça(A\;ou\;B)}=\dfrac{8\,x\,9}{4\,x\,1}=\dfrac{72}{4}=18$. Como a divisão deu exata, não podemos, ainda, dizer se é possível cobrir o tabuleiro com tais peças ou não é. No caso deste item, podemos, inicialmente, pensar em usar duas peças B e uma peça A para formar um retângulo 4 x 3:



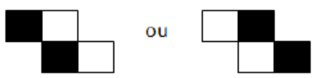


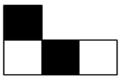
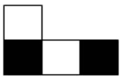
E, em seguida, sair replicando tal retângulo 4 x 3 para cobrir totalmente o tabuleiro 8 x 9, conforme mostrado na figura ao lado:
Portanto, Benjamim pode cobrir todo o tabuleiro 8 x 9.

c) A princípio, temos que: $\dfrac{\acute{a}rea\,tabuleiro}{\acute{a}rea\;peça(A\;ou\;B)}=\dfrac{9\,x\,9}{4\,x\,1}=\dfrac{81}{4}=20\,e\,resto\;1$. Como a divisão não deu exata, podemos ver claramente que não é possível cobrir o tabuleiro com tais peças.
Portanto, Benjamim não pode cobrir todo o tabuleiro 9 x 9.

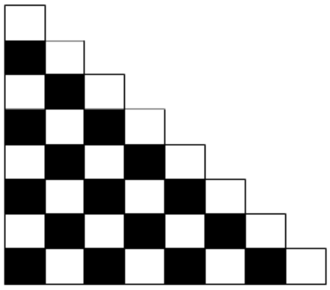
d) A princípio, temos que: $\dfrac{\acute{a}rea\,tabuleiro}{\acute{a}rea\;peça(A\;ou\;B)}=\dfrac{8+7+6+5+4+3+2+1}{4\,x\,1}=\dfrac{36}{4}=9$. Como a divisão deu exata, não podemos, ainda, dizer se é possível cobrir o tabuleiro com tais peças ou não é. Após algum tempo tentando, podemos suspeitar que não é possível. A partir da suspeita de que não é possível, podemos pensar em alguma coloração que resolva o problema, mostrando, a partir disso, que não é possível. Para este caso específico, felizmente, a coloração xadrez resolve o problema. Vejamos o porquê. Inicialmente, pintemos as peças A e B com coloração xadrez:

Peça A:



Peça B:  ou 

Note que girar ou inverter não muda o fato de haver 2 quadradinhos pretos e 2 quadradinhos brancos em qualquer uma das peças.
Agora, pintemos o tabuleiro da questão com coloração xadrez:



Note que, na configuração acima, temos 20 quadradinhos brancos e 16 quadradinhos pretos. Daí, suponhamos que seja possível. Nesse caso, sejam $y\, e\, z$ as quantidades de peças A e B que usaríamos, respectivamente, para cobrir tal tabuleiro. Dessa forma, teríamos as seguintes equações:

$$\textit{quantidade total de peças}: y+z=9\,(I)$$

$$\textit{quantidade total de quadradinhos pretos}: 2.y+2.z=16\,(II)$$

Note que as equações $(I)\, e\, (II)$ geram um absurdo.

Portanto, Benjamim não pode cobrir tal tabuleiro com tais peças.

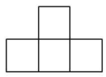
Obs.1: Note que é possível colocar no máximo 8 peças, A ou B, no tabuleiro, afinal, pela equação (II), temos que $(y+z)=8$. No caso de colocarmos 8 peças, restariam 4 quadradinhos brancos.

Obs.2: Poderíamos, também, para concluir o absurdo, ter usado a equação seguinte:

$$\textit{quantidade total de quadradinhos brancos}: 2.y+2.z=20\,(III)$$

2. Exercícios para treinamento:

2) Suponhamos que no item d da questão anterior, Benjamim tivesse exatamente duas peças do tipo C (figura ao lado) para ajudar a cobrir o tabuleiro. Nesse caso, mostre uma forma de ele cobrir totalmente o tabuleiro.
(Dica: Note que, pelo resultado da coloração xadrez do item anterior, podemos ter uma boa ideia de possíveis locais onde devemos colocar as duas peças do tipo C.)



(peça C)

3) Suponhamos que Benjamim tenha 2012^2 peças A e 2012^2 peças B. Nas mesmas condições da questão 1, pergunta-se:

a) Se o tabuleiro for 2012×2012 (ou seja, ele tiver 2012 cm de comprimento por 2012 cm de largura), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?
b) Se o tabuleiro for 2012×2013, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

c) Se o tabuleiro for 2013×2013, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

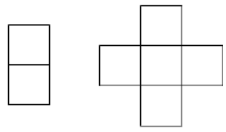
d) Se todas as casas acima de uma diagonal do tabuleiro $2012 x 2012$ forem retiradas (veja figura ao lado), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?
(Dica: 2012 é múltiplo de 4 e 2013 é múltiplo de 3)

3. Coloração xadrez:

Conforme vimos na solução da questão 1, item d, há situações em que devemos recorrer a colorações do tipo xadrez para resolver o problema. Geralmente, tal coloração serve para mostrar a impossibilidade de cobrir o tabuleiro com as peças dadas. No entanto, podem acontecer casos onde a coloração xadrez ajuda a cobrir o tabuleiro pré-determinando aonde podemos colocar alguns tipos bem específicos (e, na grande maioria dos casos, limitados) de peças, conforme vimos na questão 2.

Vejamos mais uma questão de como podemos aplicar as colorações do tipo xadrez para mostrar que não é possível cobrir um determinado tabuleiro com peças específicas.

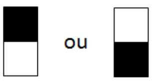
4) (São Petersburgo/1997) É possível cobrir uma mesa 75 x 75 com dominós (retângulos 1 x 2) e cruzes (formadas por 5 quadradinhos 1x1 sendo 1 no meio e 4 ao redor)?
Obs.: Um exemplo de dominó e um exemplo de cruz estão mostrados na figura ao lado



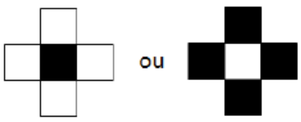
Solução:

Suponhamos que seja possível. Inicialmente, pintemos as peças com a coloração xadrez:

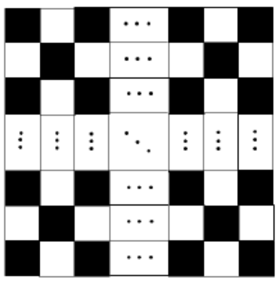
Dominó:



Cruz:



Agora pintemos o tabuleiro 75 x 75 com coloração xadrez:



Nesse caso, teremos no tabuleiro $(75^2+1)/2$ quadradinhos pretos e $(75^2-1)/2$ quadradinhos brancos (Caso tenha dúvida sobre esta quantidade de quadradinhos de cada cor, basta fazer sair colorindo os tabuleiros 3 x 3, 5 x 5, ... e ir percebendo que para cada tabuleiro n x n, com n impar, a quantidade de quadradinhos de uma cor será exatamente uma unidade a mais que o quadradinho da outra cor. Para alunos do 8º ano em diante, é possível provar tal fato aplicando um princípio da indução finita.).
Sejam d , y e z as quantidades de dominós, de cruzes com o quadradinho central preto e de cruzes com o quadradinho central branco, respectivamente, que são capazes de cobrir tal tabuleiro. Note que cada dominó ocupa exatamente um quadradinho preto e um quadradinho branco. Sendo assim, temos que:

$$quantidade\ total\ de\ quadradinhos\ pretos: d+y+4z=\frac{75^2+1}{2}\ (I)$$

$$quantidade\ total\ de\ quadradinhos\ brancos: d+4y+z=\frac{75^2-1}{2} \ (II)$$

Fazendo $(I)-(II)$, temos que:

$$(d+y+4z)-(d+4y+z)=\frac{75^2+1}{2}-\frac{75^2-1}{2}$$

$$y-4y-z+4z=\frac{75^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{75^2}{2}+\frac{1}{2} \rightarrow 3.(z-y)=1$$

Note que 3.(z-y) = 1 não pode ser verdade, pois z e y são inteiros e 1 não é múltiplo de 3. Portanto, temos um absurdo. Sendo assim, não é possível cobrir o tabuleiro com tais peças.

Dica: Analise os casos pequenos! Principalmente, quando não souber por onde começar a questão. Nesses casos de tabuleiros grandes, se for possível tal cobertura, geralmente, tratar-se-á de montar algum tabuleiro pequeno e sair replicando pelo tabuleiro grande. No caso dessa questão, por exemplo, seria o caso de tentar algum tabuleiro 3 x 3 ou 5 x 5 ou 3 x 5 (afinal 75 é múltiplo de 3 e de 5) e sair replicando. Com um pouco de força bruta, vemos que nenhum dos tabuleiros pode ser coberto, o que nos leva a suspeitar da impossibilidade de cobrir tal tabuleiro com tais peças. Então, desconfiando da impossibilidade, é hora de pensar em alguma coloração que resolva o problema.

4. Exercício para treinamento:

5) Usando apenas dominós (retângulos 1 x 2), podendo girá-los é possível cobrir um tabuleiro, sem buracos, nem sobreposições:

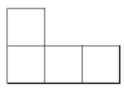
a) Se o tabuleiro for 6 x 6?
b) Se o tabuleiro for 6 x 6, porém retirando dois quadradinhos: o da quina alta e esquerda e o da quina baixa e direita?

5. Coloração zebra:

Infelizmente, a coloração xadrez nem sempre resolverá todos os problemas. Por isso, precisamos aprender outros tipos de colorações. Nesta seção, aprenderemos a coloração zebra.

Vejamos, então, mais um exemplo de aplicação da coloração zebra:

6) (Coreia/2000) Sendo m e n inteiros positivos maiores que 1, prove que podemos cobrir um tabuleiro n x m, sem sobreposições nem buracos, usando apenas L-tetraminós (figura ao lado) se e somente se $m.n$ é múltiplo de 8.



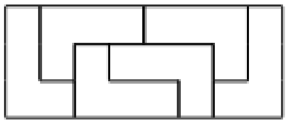
Solução:

Parte 1: Assuma que $m.n$ é múltiplo de 8. Então podemos cobrir o tabuleiro m x n com L-tetraminós.

Vamos dividir a questão em 2 casos:

Caso 1: Se m e n são, ambos, pares: nesse caso, basta usar 2 L-tetraminós para formar um retângulo 2 x 4 e sair replicando por todo o tabuleiro (ideia apresentada na questão 1, item a).
Caso 2: Suponhamos, sem perca de generalidade que m é impar. Nesse caso, n é múltiplo de 8. Sendo assim, podemos usar 6 L-tetraminós para formar um retângulo 3 x 8, conforme mostrado na figura ao lado:

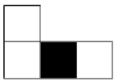
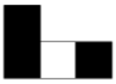
Daí, basta replicando na horizontal para obtermos um retângulo 3 x n coberto por L-tetraminós.
Depois, para montar na vertical, basta sair usando os retângulos 2 x 4 formados no caso anterior, ir formando retângulos 2 x n e ir encaixando tais retângulos 2 x n em cima do retângulo 3 x n até cobrir totalmente o tabuleiro m x n.



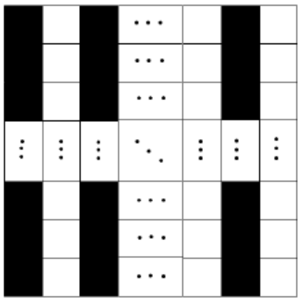
Parte 2: Assuma que podemos cobrir o tabuleiro m x n com L-tetraminós. Então $m.n$ é múltiplo de 8.

Como podemos cobrir o tabuleiro m x n com L-tetraminós, temos que: $\frac{área\, total}{área\, L-tetraminós}=\frac{mn}{4}$

é um valor inteiro. Portanto, m.n é múltiplo de 4. Suponhamos que, sem perca de generalidade, n é par.
Pintemos os L-tetraminós com coloração zebra:

Opções:  ou 

Note que, mesmo que giremos ou invertamos alguns L-tetraminós ou até todos, esse fato de que serão 3 quadradinhos de uma cor e 1 quadradinho de outra cor não muda.
Agora, pintemos o tabuleiro m x n com coloração zebra:



Daí, temos que há $(n/2).m$ quadradinhos pretos e $(n/2).m$ quadradinhos brancos.

Sejam y e z a quantidades de L-tetraminós com 1 quadradinho preto e 3 quadradinhos pretos, respectivamente, que estão no tabuleiro m x n. Daí, temos que:

$$quantidade\, total\, de\, quadradinhos\, pretos: y+3z=\frac{m.n}{2}(I)$$

$$quantidade\, total\, de\, quadradinhos\, brancos: 3y+z=\frac{m.n}{2}(II)$$

Fazendo $(I)-(II)$, temos que:

$$(y+3z)-(3y+z)=\frac{m.n}{2}-\frac{m.n}{2}$$

$$y-3y+3z-z=0 \rightarrow 2z=2y \rightarrow z=y(III)$$

Aplicando (III) em (I), temos que:

$$y+3z=\frac{m.n}{2}\rightarrow 4z=\frac{m.n}{2}\rightarrow m.n=8z$$

6. Exercício para treinamento:

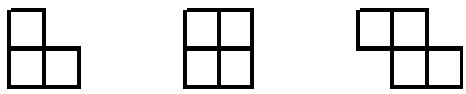
7) Usando apenas L-tetraminós, é possível cobrir totalmente um tabuleiro 6 x 6, sem deixar buracos, nem fazer sobreposições?

7. Outras colorações com apenas 2 cores:

Vejamos outros tipos de colorações a partir de problemas específicos. No final desse material, há dicas de soluções para os exercícios desse tópico.

8) É possível cobrir um tabuleiro 6 x 6 usando apenas retângulos 1 x 4, sem deixar buracos, nem fazer sobreposições?

9) (Maio/2008) Matias pretende cobrir um tabuleiro 7 x 7, dividido em casinhas 1 x 1, com peças dos 3 tipos mostradas ao lado, sem fazer buracos, nem fazer sobreposições e sem sair do tabuleiro.
Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casinhas e cada peça dos tipos 2 e 3 cobrem exatamente 4 casinhas.
Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter usado.
Obs.: Pode-se ”girar” e “inverter” as peças.

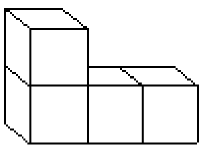


tipo 1 **tipo 2** **tipo 3**

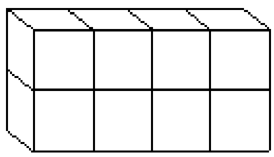
10) (Rússia/1997) É possível cobrir 3 faces, adjacentes 2 a 2, de um cubo de aresta 4 com 16 retângulos adesivos 1 x 3, sem buracos e nem sobreposições?

11) (Rioplatense/2011 – N2 – Q2) É possível cobrir um cubo 6 x 6 x 6 nos seguintes casos?

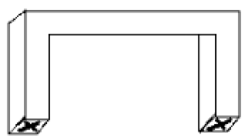
a) usando somente fichas da forma:



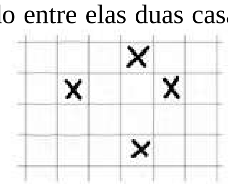
b) usando somente fichas da forma:



12) (OBM/2012 – N2 – 3ª fase – Q6) Maria possui uma barra de chocolate m x n dividida em quadradinhos 1 x 1. Ela deseja marcar cada uma das casinhas usando o seguinte instrumento de marcação, mostrado na figura ao lado.



A peça pode ser usada na horizontal ou na vertical. Ela marca duas casas deixando entre elas duas casas com distância (d-1) sem serem alteradas e não é permitido marcar um quadradinho mais que uma vez. Para que valores de m, n e d é possível fazer a marcação de todas os quadradinhos seguindo estas condições.
Obs.: Na figura ao lado, há um exemplo de marcação com d = 3, usando uma vez na vertical e uma na horizontal.

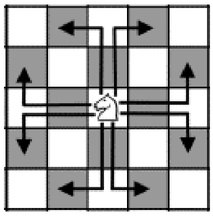


8. Colorações com mais cores:

Em alguns problemas, é necessário colorir com mais de duas cores para conseguir resolvê-los. Às vezes, precisamos também usar números específicos que facilitem a solução. Mais uma vez, vejamos aplicações práticas:

13) (OBM/2012 – N2 – 2ª fase – Q1) João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5 × 5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro

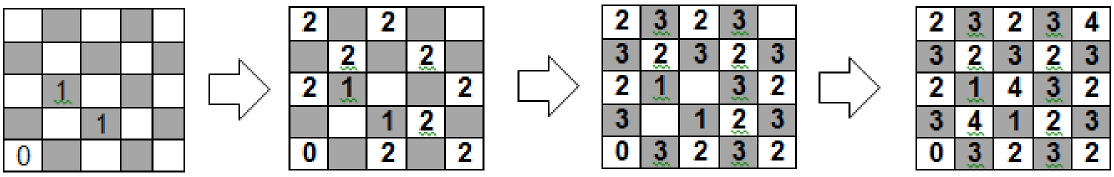
5 × 5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5 × 5?



Observação: O cavalo movimenta-se em L, isto é, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular, como ilustrado na figura ao lado.

Solução:

Vamos colorir cada casa do tabuleiro 5 x 5 com o número i quando o cavalo precisar de no mínimo i movimentos para chegar a tal casa do tabuleiro. Comecemos, então, pelo 1:



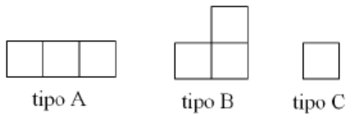
Portanto, a resposta é 4.

14) (Estônia/1993) Para quais n é possível cobrir um retângulo de tamanho 3 x n com peças mostradas na figura ao lado sem sobreposição?

Dica: Pinte o tabuleiro conforme mostrado ao lado.
Note que a soma é igual a n.
Tente usar uma ideia parecida à aplicada na questão 9 e prove que apenas uma das peças pode ser usada e, por último, conclua q n deverá ser par.

1	1	1	1	1	1	1	
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	
1	1	1	1	1	1	1	

15) (Bielorrússia/1999) Num tabuleiro 7 x 7, dividido em 49 quadradinhos 1 x 1, Tom e Jerry jogarão com peças dos seguintes tipos: A (retângulo 1 x 3), B (formato em L, com 3 quadradinhos) e C (quadradinho 1 x 1), cujos desenhos estão mostrados na figura ao lado. Jerry tem infinitas peças A e uma peça B, enquanto Tom tem apenas uma peça C.



a) Prove que Tom pode colocar sua peça em um lugar tão estratégico que impedirá Jerry de cobrir totalmente o tabuleiro, sem buracos e nem sobreposições. Lembre-se de que Jerry usará apenas as peças que possui.
b) Suponha agora que Jerry encontra uma nova peça B, ficando, agora, com duas peças B. Prove que, agora, Jerry pode cobrir totalmente o tabuleiro, independente de como Tom colocar sua peça.

Solução:

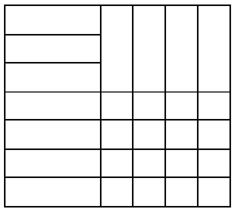
a) Considere as duas colorações abaixo:

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	X	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	X	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1

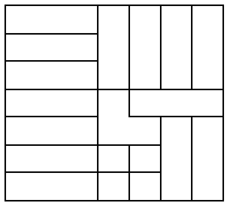
Note que com o X colocado no lugar de um 2 nas duas colorações provoca uma figura com dezessete 1's, quinze 2's e dezesseis 3's em ambas as colorações.
Perceba, também, que cada retângulo 1 x 3 cobre exatamente um 1, um 2 e um 3 nas duas colorações, cabendo à figura do tipo B, a responsável por "consertar o desequilíbrio de ter dois 1's e um 3 a mais".

No tabuleiro da esquerda, para a figura tipo B cobrir exatamente dois 1's e um 3, ela deverá ser exatamente colocada na forma ┌; Porém, no tabuleiro da direita, pode-se ver que uma peça do tipo B colocada na forma ┌ cobrirá exatamente um 1, um 2 e um 3 e, desse modo, não consertará tal desequilíbrio. Sendo assim, Jerry, com as peças que tem, não conseguirá cobrir totalmente o tabuleiro, uma vez que ele não consegue cobrir dezessete 1's, quinze 2's e dezesseis 3's em ambas as colorações, se Tom colocar sua peça na posição marcada.



b) Note que com 11 retângulos 1 x 3, Jerry consegue limitar um quadrado 4 x 4, incluindo uma quina, para onde Tom colocar sua peça. Por exemplo, suponhamos que Tom colocou sua peça no canto inferior direito. Para isso, Jerry poderia fazer conforme mostrado ao lado.

Em seguida, Jerry pode reduzir o quadrado 4 x 4 a um quadrado 2 x 2, usando 3 retângulos 1 x 3 e 1 peça do tipo B. Por exemplo, suponhamos que Tom tenha colocado a peça na parte esquerda baixa da figura ao lado. Daí, Jerry pode limitar tal quadrado 2x2 cobrindo conforme mostrado na figura ao lado.

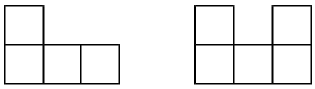


Por fim, Jerry usa a outra peça do tipo B e cobre o que falta do tabuleiro.

9. Mais exercícios

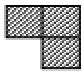
A) Exercícios 1 estrela

16) (Seletiva Fortaleza – Rioplatense/2007 – Nível A) Ache o menor lado de um tabuleiro quadrado que pode ser montado usando um mesmo número de peças de cada um dos tipos ao lado, sabendo que cada um dos quadradinhos das peças mede 1.

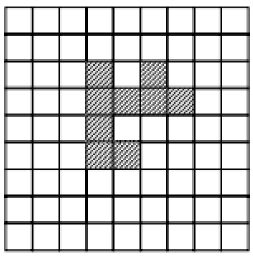


17) É possível cobrir um tabuleiro de xadrez normal, 8 x 8, sem duas casinhas (a da ponta esquerda alta e a da ponta direita baixa) usando apenas dominós 1 x 2, sem deixar buracos e nem fazer sobreposições?

18) (Maio/2004) Sobre um tabuleiro 9 x 9, dividido em casas de 1 x 1, colocam-se, sem superposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma mostrada ao lado.



Cada peça cobre exatamente 3 casas.
a) A partir do tabuleiro vazio, qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?
b) A partir do tabuleiro com 3 peças e colocadas como mostra o diagrama ao lado, qual é a máxima quantidade de peças que se pode colocar?

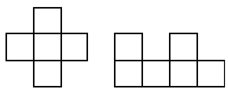


19) (Rússia/1996) Podemos cobrir um tabuleiro 5 x 7 com L-triminós de tal forma que cada casa do tabuleiro seja coberta por um mesmo número de peças?

B) Exercícios 2 estrelas

20) (Rioplantense/2012 – Nível A) Encontrar o maior número de fichas retangulares de 4 x 1 que é possível colocar em um quadriculado 10 x 10, de tal maneira que quaisquer duas fichas não se tocam, nem em seus lados, nem em seus vértices.
Observação: Cada ficha deve cobrir exatamente quatro quadradinhos do quadriculado.

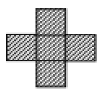
21) (Rioplatense/2012 – Nível 1) Abel tem infinitas peças dos tipos A e B.
As peças do tipo A tem 5 quadradinhos de lado 1 e as peças do tipo B tem 6 quadradinhos de lado 1, como mostrado ao lado.



tipo A tipo B

Abel quer cobrir totalmente um tabuleiro n x n, dividido em n^2 quadradinhos de lado 1, usando algumas dessas peças, sem deixar buracos, sem sobrepor peças e sem sair do tabuleiro.
Qual é o menor n para o qual ele pode fazê-lo?

22) (Maio/2005) Sobre o tabuleiro 9 x 9, aterrissou a nave inimiga que cobre exatamente 5 casas do tabuleiro, conforme mostrado na figura ao lado.



A nave é invisível.

Cada míssil defensivo cobre exatamente uma casa, e destrói a nave se bater numa das 5 casas que esta ocupa.
Determine o número mínimo de mísseis que são necessários para destruir com certeza a nave inimiga.

C) Exercícios 3 estrelas

23) (Lista Cone Sul/2011) É possível cobrir totalmente um quadrado de lado 1997 com quadrados de lados maiores que 30 e menores que 1997, sem deixar buracos e nem fazer sobreposições?

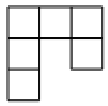
24) (Rioplatense/1999) É possível cobrir um tabuleiro 1999 x 1999 com quadrados de lados inteiros maiores que 35 e menores que 1999?

25) (Lista Cone Sul/2008) Na floresta onde vivem os Smurfs, Gargamel plantou 1280 pinheiros, cada um com 1 metro de diâmetro. A floresta é um campo retangular de dimensões 1001 x 945 metros. Vovô Smurf gostaria de construir nela sete campos de tênis, cada um deles de dimensões 20 x 34 metros. Vovô Smurf pode construir as quadras, sem derrubar nenhuma árvore, independente de como Gargamel plantou as árvores?

26) Dado um tabuleiro 5 x 5, existe um bloco 1 x 1 tal que se ele é removido, então o resto do tabuleiro pode ser completamente coberto por peças 3 x 1? Se sim, encontre todos os blocos que possuem tal propriedade e prove sua resposta.

27) (Turquia - Teste IMO/2004) Um tabuleiro 11 x 11 é coberto, sem buracos e nem sobreposições, com uma peça 1 x 1 e quarenta peças 1 x 3. Determine todos os locais onde a peça 1x 1 pode ser colocada.

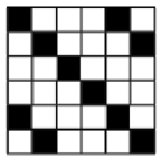
28) (IMO/2004) Um gancho é uma figura de seis casas como na figura ao lado ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões. Determine todos os tabuleiros m x n que podem ser cobertos usando esses ganchos.



gancho

10. Dicas para os exercícios do tópico 7

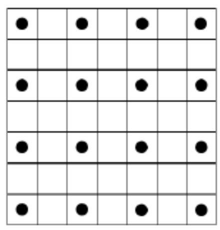
8) Dica: Observe atentamente a coloração ao lado. Note que há 10 quadradinhos pretos.



9) Solução:

Sejam y, z e w as quantidades de peças do tipo 1, do tipo 2 e do tipo 3, respectivamente, que Matias pode ter usado. Daí, temos que:

$$\text{área total} = 3y + 4z + 4w = 49 \ (I)$$



Considere a coloração ao lado. Note que cada peça cobre, no máximo, um ponto preto. Dessa forma, temos que Matias usaria, pelo menos, 16 peças para cobrir todo o tabuleiro. Daí, temos que:

$$\text{quantidade de peças} = y + z + w \geq 16 \ (II)$$

Fazendo $4.(II)$, temos que:

$$4.(y+z+w) \geq 16 \cdot 4$$

$$4y + 4z + 4w \geq 64$$

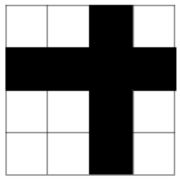
$$y+(3y+4z+4w)\geq 64$$

Aplicando (I), temos que:

$$y+49\geq 64 \rightarrow y\geq 15$$

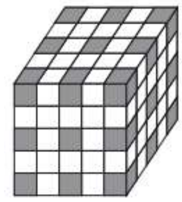
Portanto, temos que Matias usará, no mínimo, 15 peças do tipo 1.
Note que y = 16, por (I), implicaria em 4z+4w = 1, o que geraria um absurdo, pois 1 não é múltiplo de 4.
Logo, Matias usará exatamente 15 peças do tipo 1 e 1 peça de outro tipo.

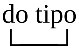
Exercício extra: Mostre como Matias pode cobrir o tabuleiro 7 x 7 com 15 peças do tipo 1 e 1 peça do tipo 2 e com 15 peças do tipo 1 e 1 peça do tipo 3.



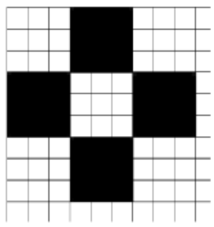
10) Dica: Pinte as 3 faces adjacentes 2 a 2 com a coloração ao lado, de forma que tais colorações se encaixem.

Obs.: Note que cada retângulo adesivo seria composto por exatamente 1 quadradinho preto e 2 quadradinhos brancos.



11) Dicas:
a) É possível! Usando 6 fichas, pode-se formar um paralelepípedo do tipo 2 x 2 x 6.
Para isso, basta “encaixar 2 fichas de frente”, formando algo tipo , em seguida, faz isso de novo para outras duas e, por último, encaixa as outras duas “em cima”.
Daí, é só sair replicando 9 vezes para conseguir o cubo 6 x 6 x 6
b) Na figura ao lado, há um cubo de aresta 5. Pense na mesma coloração para um cubo de aresta 6. Quantos quadradinhos pretos teriam? E como ficariam as fichas com tal coloração? Algum problema com a paridade?

12) Dica:



Pinte o tabuleiro como um xadrez gigante, com quadradinhos d x d em preto e branco de forma alternada. Veja um exemplo, ao lado, para d = 3.
Note que teremos uma casa de cada quadradinho de cada cor marcada por cada uma das marcações.