Olhos de águia

Semana Olímpica/2020 - Nível 3 - Natal/RN

Prof. Armando Barbosa

31 de janeiro de 2020

Atualmente, temos visto um conjunto cada vez mais diversificado de questões de olímpiada de matemática. Por exemplo, vemos questões:

- que se aprofundam muito num tema;
- que misturam temas como, por exemplo, teoria dos números e combinatória;
- que não parecem ser de um tema, mas, na verdade, são.

Neste contexto, há pessoas envolvidas diariamente com preparação de alunos olímpicos que acreditam que, na busca da melhor preparação possível, eles buscam estudar cada vez mais teoria de forma a tentar cobrir os dois primeiros tópicos citados e esquecem de praticar mais, resolver mais questões, de forma que, involuntariamente, o terceiro item fica menos "coberto". Nessa linha de raciocínio, buscando preencher um pouco essa lacuna, este material pretende abordar o último tópico citado acima.

Lembremos que o autor não está dizendo para abandonar o estudo da teoria. Logicamente que é importante saber teoria, resultados conhecidos como, por exemplo, fatorações algébricas, somas de Newton, LTE, geometria projetiva e etc. Porém, é também importante saber "pensar em problemas"através de técnicas como "estudar casos iniciais", "conjecturar respostas"e etc. É neste último ponto em que nos concentraremos neste material.

Essa importância de saber "pensar em problemas"se torna maior ainda na medida que, normalmente, um problema "novo"é quase sempre, de alguma forma, baseado ou lembra um antigo.

Assim, para facilitar a possíbilidade do material alcancar seu objetivo com êxito, ele está dividido nas seguintes seções:

1. Questões que não parecem usar potências de 2, mas são de potências de 2;
2. Questões que não parecem de polinômios, mas são de polinômios;
3. Questões que não parecem de grafos, mas não de grafos.

Aproveitemos, então, para explicar o título: olhos de águia. Num trecho de um site da internet, é possível encontrar que "A águia pode enxergar um peixe de oito centímetros saltando num lago e oito quilômetros de distância."Esta visão muito longe é o que espera-se de um aluno muito qualificado na olimpíada de matemática e é isto que procuraremos despertar um pouco apresentando ideias.

Sem mais delongas, vamos ao que interessa.

1 Questões que não parecem usar potências de 2, mas são de potências de 2

A ideia dessa seção é apresentar situações em que, a princípio, o problema não parece ser de potência de 2, mas, na verdade, o problema é de potência de 2 (ou, pelo menos, de potência).

Para entender melhor, vejamos o primeiro problema:

Problema 1 *(Rússia/2008)* Sofia escreve um conjunto $\mathbb{P}$ de números primos num papel. Prove que ela pode obter um número inteiro positivo x tal que, para cada $p \in \mathbb{P}$, existem inteiros positivos a e b tais que $x = a^p + b^p$ e, para cada $p \notin \mathbb{P}$, não existem inteiros positivos a e b tais que $x = a^p + b^p$.

Solução: Seja $m = \prod_{p \in \mathbb{P}}$ e tome $x = 2^{m+1}$.

A primeira parte de provar que, para cada $p \in \mathbb{P}$, existem inteiros positivos a e b tais que $x = a^p + b^p$ eh imediata, bastando fazer:

$$x = \left(2^{\frac{m}{p}}\right)^p + \left(2^{\frac{m}{p}}\right)^p$$

Falta provar que não há solução, com $p \notin \mathbb{P}$, para $a^p + b^p = 2^{m+1}$. Para isso, suponhamos que haja solução.

Daí, sejam k_1, k_2 inteiros não negativos e I_1 e I_2 impares tais que:

$$a = 2^{k_1} \cdot I_1 \quad b = 2^{k_2} \cdot I_2$$

Nesse caso, temos que:

$$\begin{array}{rcl}
a^p + b^p = 2^{m+1} & \Rightarrow & \left(2^{k_1} \cdot I_1\right)^p + \left(2^{k_2} \cdot I_2\right)^p = 2^{m+1} \\
\text{Se } k_1 \neq k_2 & : & \text{suponhamos, s.p.g., que } k_1 < k_2 \text{ (caso } k_1 > k_2 \text{ é análogo)} \\
& \Rightarrow & 2^{k_1 p} \cdot \left(\underbrace{I_1^p + 2^{k_2 - k_1} I_2^p}_{\text{impar}} \right) = 2^{m+1} \\
& \Rightarrow & \begin{cases} I_1^p + 2^{k_2-k_1} I_2^p \text{ é impar} \\ I_1^p + 2^{k_2-k_1} I_2^p \mid 2^{m+1} \end{cases} \quad \Rightarrow I_1^p + 2^{k_2-k_1} I_2^p = 1 \Rightarrow \text{ Absurdo!} \\
\text{Portanto} & : & \boxed{k_1 = k_2 = k}
\end{array}$$

Além disso, podemos concluir que:

$$a^p + b^p = 2^{m+1} \Rightarrow 2^k \cdot (I_1^p + I_2^p) = 2^{m+1} \Rightarrow \boxed{I_1^p + I_2^p = 2^{m+1-kp}} \tag{1}$$

Para concluir a solução, falta apenas analisar dois casos:

Caso 1: Se $2 \notin \mathbb{P}$:

$$\begin{array}{l}
I_1^p + I_2^p \equiv I_1^2 + I_2^2 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 4 \nmid I_1^2 + I_2^2 \\
\begin{cases} 4 \nmid I_1^2 + I_2^2 \\ I_1^2 + I_2^2 \geqslant 1 + 1 = 2 \\ (1) \Rightarrow I_1^2 + I_2^2 \mid 2^{m+1-kp} \end{cases} \quad \Rightarrow \boxed{I_1 = I_2 = 1} \\
\Rightarrow (1) \Rightarrow m + 1 - kp = 1 \Rightarrow m = kp \Rightarrow p \mid m
\end{array}$$

Fato absurdo, pois, conforme determinado na primeira linha da solução, m é o produto dos primos em $\mathbb{P}$ e $p \notin \mathbb{P}$.

Caso 2: Se p é primo impar

$$(1) \Rightarrow 2^{m+1-kp} = I_1^p + I_2^p = (I_1 + I_2) \cdot \left(\underbrace{I_1^{p-1} - I_1^{p-2} \cdot I_2 + \cdots - I_1 \cdot I_2^{p-2} + I_2^{p-1}}_{L} \right)$$

$$\Rightarrow L \text{ tem } p \text{ termos } \Rightarrow L \text{ é impar}$$

$$\begin{cases} L \text{ é impar} \\ L \mid 2^{m+1-kp} \end{cases} \Rightarrow L = 1 \Rightarrow I_1^p + I_2^p = I_1 + I_2$$

$$p \geqslant 3 \Rightarrow I_1^p + I_2^p \geqslant I_1^3 + I_2^3 \geqslant I_1 + I_2$$

Pelos dois últimos resultados, vale a igualdade, ou seja: $\Rightarrow \boxed{I_1 = I_2 = 1}$

$$(1) \Rightarrow 2^1 = 2^{m+1-kp} \Rightarrow m = kp \Rightarrow p \mid m$$

Fato absurdo, pois, conforme determinado na primeira linha da solução, m é o produto dos primos em $\mathbb{P}$ e $p \notin \mathbb{P}$.

■

Notemos que, na solução apresentada, a ideia da potência de 2 não aparece imediatamente da solução, mas surge da análise dos dados e dos conhecimentos técnicos mínimos de fatorações algébricas e e teoria dos números. Além disso, percebamos que conjecturar a potência de 2 é apenas uma parte da solução. Por último, lembremos que o pensamento de usar potência de 2 não está tão "na cara" no enunciado: foi necessário olhar um pouco mais longe, portanto, para ver a relação entre uma potência de 2 e a solução.

Para qualificar mais nossos estudos, vejamos um outro problema que, dessa vez, parece mais imediato usar potência de 2, mas que será insumo para uma questão mais díficil, mais a frente.

Problema 2 *(Belarus/TST - 2019)* Em duas caixas, são colocadas, no total, 1019 bolas de forma que não há caixa sem bola. Em cada minuto, Sofia escolhe a caixa com quantidade par de bolas e passa a metade delas para a outra caixa. Prove que, para cada k inteiro positivo, com $1 \leqslant k \leqslant 2018$, há um momento em que existe uma caixa com exatamente k bolas.

Solução: Sejam a_i, b_i as quantidades de bolas em cada caixa no minuto i, após Sofia ter movimentado elas. Sejam a_0 e b_0 as quantidades iniciais de bola. Daí, temos que a soma das quantidades de bolas é <u>invariante</u>. Isto é:

$$a_i + b_i = 2019$$

Suponhamos que, em algum momento, b_i seja par. Nesse caso, olhando para a invariância já citada, podemos concluir que:

$$\begin{cases} a_{i+1} = a_i + \frac{b_i}{2} \Rightarrow 2a_{i+1} = 2a_i + b_i \Rightarrow \boxed{2a_{i+1} - a_i = 1019} \\ b_{i+1} = \frac{b_i}{2} \Rightarrow \boxed{2b_{i+1} = b_i} \end{cases}$$

Se o a_i for o par, podemos fazer uma análise análoga. Desse modo, através de indução ou produto telescópico, temos que:

$$\begin{cases} a_i \equiv 2^j \cdot a_{i+j} \pmod{1019} \\ b_i \equiv 2^j \cdot a_{i+j} \pmod{1019} \end{cases} \tag{2}$$

Além disso, sabemos que:

$$\begin{aligned}
1019 \text{ é primo} &\Rightarrow 2^{1018} \equiv 1 \pmod{1019} \Rightarrow \text{ord}_2 1019 \mid 1018 \\
\frac{1018}{2} = 509 \text{ é primo} &\Rightarrow \text{ord}_2 1019 = \{1, 2, 509, 1018\} \\
2^1 - 1 < 1019 \text{ e } 2^2 - 1 < 1019 &\Rightarrow \boxed{\text{ord}_2 1019 = 509 \text{ ou } 1018}
\end{aligned}$$

Temos, agora, o suficiente para concluir pois:

Caso 1: Se $\text{ord}_2 1019 = 1018$

Por $j = 0$ em (2), temos que, em cada caixa, em algum momento, terá k bolas, para todo $1 \leqslant k \leqslant 1018$, pois, nesse caso, teríamos que o conjunto $\{2^1, 2^2, \cdots, 2^{1018}\}$ formaria um sistema completo de resíduos $\pmod{1019}$ e, sendo 1019 primo, temos que os elementos iniciais são tais que:

$$mdc\,(1019, a_0) = (1019, b_0) = 1$$

e, por consequência, os conjuntos $\{2^1 \cdot a_0, 2^2 \cdot a_0, \cdots, 2^{1018} \cdot a_0\}$ e $\{2^1 \cdot b_0, 2^2 \cdot b_0, \cdots, 2^{1018} \cdot b_0\}$, também, formam um sistema completo de resíduos.

Caso 2: Se $\text{ord}_2 1019 = 509$

Pela invariância da soma, temos que: $a_0 \equiv -b_0 \pmod{1019}$. Daí, com essa relação e por $j = 0$ em (2), vamos mostrar que apenas uma das caixas, em algum momento, terá k bolas, para todo $1 \leqslant k \leqslant 1018$. Para isso, comecemos do fato que 1019 é primo e isso implica em:

$$mdc\,(1019, a_0) = (1019, b_0) = 1$$

Daí, caso não aconteça o que afirmamos no começo desse caso, então teríamos que existe m, n inteiros positivos, com $0 \leqslant m, n \leqslant 508$, tais que:

$$\begin{aligned}
& a_m \equiv b_n \pmod{1019} \\
j = 0 \text{ em } (2) \Rightarrow\ & 2^m a_0 \equiv 2^n b_0 \pmod{1019} \\
b_0 \equiv -a_0 \pmod{1019} \Rightarrow\ & 2^m a_0 + 2^n a_0 \equiv 0 \pmod{1019}
\end{aligned}$$

Suponhamos, s.p.g., $m \geqslant n$. Daí, como $mdc\,(1019, a_0) = 1$, podemos concluir que:

$$1019 \mid a_0\,(2^m + 2^n) \Rightarrow 1019 \mid 2^n\left(2^{m-n} + 1\right) \Rightarrow 1019 \mid 2^{m-n} + 1$$

Com isso, se $\text{ord}_2 1019 = 509$, então temos que $509 \not| m - n$ e $509 \mid 2(m - n)$. Esses fatos são contraditórios com $0 \leqslant m, n \leqslant 508$, pois dessa última relação, teríamos que: $-508 \leqslant m - n \leqslant 508$.

■

Notemos que a ideia de passar a metade pode até sugerir a potência de 2. Ainda assim, foi necessário um olhar de águia (ou pelo menos conhecer algum problema parecido) para saber como trabalhar com a potência de 2 e com as relações de ordem, de forma correta, incluindo, por exemplo, perceber que 1019 é o dobro de um primo mais um.

Para evitar que nós fiquemos "vidrados"a pensar sempre em potências de 2, vejamos um problema de ideia parecida, mas com solução diferente por usar outra potência.

Problema 3 *(Japão/2000)* A ação de *subembaralhar* cartas a_1, a_2, $\cdots$, a_{3n}, ordenadas da esquerda para direita, consiste em colocá-las na ordem:

$$a_3, a_6, \cdots, a_{3n}, a_2, a_5, \cdots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \cdots, a_{3n-2}.$$

Por exemplo, o subembaralhamento duas vezes das cartas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ordenadas, inicialmente, da esquerda para a direita, resulta em:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \to 3, 6, 2, 5, 1, 4 \to 2, 4, 6, 1, 3, 5$$

Começando com as cartas 1, 2, $\cdots$, 191, 192 ordenadas, inicialmente, da esquerda para a direita, é possível, após um número finito de subembaralhamentos, obter a ordem 192, 191, $\cdots$, 2, 1?

Para concluir esta seção fixando bem as ideias, vejamos um problema que lembra os dois anteriores, mas que se difere por ter um nível maior de dificuldade, apesar de não usar nenhuma técnica muito avançada de combinatória.

Problema 4 *(Sérvia/TST - 2017)* Dado um par ordenado de inteiros positivos (x, y), com exatamente uma coordenada par, um movimento legal relaciona esse par ao par $\left(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2}\right)$, se $2 \mid x$, e ao par $\left(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$, se $2 \mid y$. Prove que, para todo inteiro positivo impar $n > 1$, existe um inteiro positivo par b, com $b < n$, tal que, após alguns movimentos legais, o par (n, b) é relacionado ao par (b, n).

Solução: Seja (x_k, y_k) o par obtido após k movimentos legais. Notemos que a soma $x_k + y_k$ é invariante e igual a $n + b$.

Além disso, temos que:

$$(x, y) \begin{cases} \text{se } x \text{ par: } \left(\frac{x}{2}, y + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} \equiv x \pmod{n+b} \\ \\ \text{se } x \text{ impar: } \left(x + \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot \left(x + \frac{y}{2}\right) \equiv 2x + y \equiv x \pmod{n+b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ Em ambos os casos: } \boxed{2x_k \equiv x_{k+1} \pmod{n+b}} \qquad (3)$$

Daí, por indução simples (ou produto telescópico), sendo (x_0, y_0) a configuração inicial, podemos perceber que:

$$2^k x_k \equiv x_0 \equiv n \pmod{n+b}$$

Portanto, sendo (b, n) a posição final que estamos procurando, desejamos, então, achar um t inteiro positivo tal que:

$$2^t b \equiv n \equiv -b \pmod{n+b} \Rightarrow \left(2^t + 1\right) b \equiv 0 \pmod{b+n}$$

Para isso, sendo r o inteiro positivo tal que $2^r < n < 2^{r+1}$, basta tomar:

$$b = 2^{r+1} + 1 - n$$

pois, nesse caso, teríamos $t = r + 1$ e todas os sistemas de módulos teriam solução, uma vez que, nesse caso, $(n + b)$ é impar e, consequentemente, $mdc\,(2^t, b + n) = 1$.

Em termos práticos, para um dado n impar, basta tomar b tal que $(b + n)$ é igual a um mais a primeira potência de 2, após n. Por exemplo, para $n = 19$, teríamos $b = 14$, o que daria certo, pois:

$$(19, 14) \to (26, 7) \to (13, 20) \to (23, 10) \to (28, 5) \to (14, 19)$$

■

No problema anterior, um bom aluno poderia conjecturar, corretamente, qual n esperto que resolveria o problema. No entanto, ainda que a conjectura correta seja importante, para concluir a solução, seria necessária mais alguma outra ideia: a de olhar uma outra monovariante, representada pela equação (3). Aqui mora o olhar de águia dessa solução.

Notemos que essa ação de perceber tal monovariante teria mais chances de dar certo se o aluno conhecesse as duas soluções anteriores a essa. Assim, fica esclarecida a razão de ter apresentado as duas questões anteriores a essa e fica evidente, mais uma vez, a importância de praticar.

Continuemos nossos estudos, vendo agora olhos de águia em questões de polinômios.

2 Questões que não parecem de polinômios, mas são de polinômios

Nessa seção, nosso objetivo, será ver problemas que, a princípio não parecem ser de polinômios, mas são de polinômios. Vejamos um exemplo disso:

Problema 5 *(IMO/SL - 2005)* Sejam a, b, c, d, e e f números inteiros positivos. Sabendo que a soma $S = a+b+c+d+e+f$ divide tanto $(abc+def)$ como $(ab+bc+ca-de-ef-fd)$, prove que S é composto.

Solução: Consideremos o polinômio:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)-(x-d)\cdot(x-e)\cdot(x-f) \\ &= Sx^2+Qx+R \end{aligned}$$

sendo $Q = (ab+bc+ca-de-ef-fd)$ e $R = abc+def$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} S \mid Q, R \Rightarrow S \mid P(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \boxed{S \mid P(d) = (d+a)\cdot(d+b)\cdot(d+c)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como a, b, c e d são inteiros positivos, temos que:

$$S > \max\{d+a, d+b, d+c\} \Rightarrow S \nmid d+a \quad S \nmid d+b \quad S \nmid d+c$$

Portanto, S é composto, pois, caso contrário, pelo fato de $S \mid P(d)$, então ele dividiria pelo menos um elemento do conjunto $\{d+a, d+b, d+c\}$. ■

Na solução anterior, precisaríamos de olhos de águia (ou conhecer alguma outra questão semelhante) para visualizar que a questão não era somente de teoria dos números, mas que era necessário alguma noção de como envolver polinômios para achar a solução.

Para fixar melhor, vejamos outro exemplo:

Problema 6 *(Índia/TST - 2016)* Sejam α e β números racionais positivos, tais que existem inteiros positivos m e n de forma que $\left(\alpha^{\frac{1}{n}}+\beta^{\frac{1}{m}}\right)$ é racional. Prove que $\alpha^{\frac{1}{n}}$ e $\beta^{\frac{1}{m}}$ são, ambos, racionais.

Solução: Seja $k = \alpha^{\frac{1}{n}}+\beta^{\frac{1}{m}}$. Consideremos os polinômios:

$$p(x) = x^n - \alpha \qquad q(x) = (k-x)^m - \beta$$

Nesse caso, temos que $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ com $\alpha^{\frac{1}{n}}$ sendo raíz em comum. Em outras palavras, temos que:

$$\left(x-\alpha^{\frac{1}{n}}\right)\Big|\, p(x) \qquad \left(x-\alpha^{\frac{1}{n}}\right)\Big|\, q(x) \tag{4}$$

Suponhamos que existe outra raiz comum de p e q. Daí, notemos que:

- As raízes de $p(x)$ são $\omega_t \cdot \alpha^{\frac{1}{n}}$ onde $\omega_t = cis\dfrac{2\pi t}{n}$, com $1 \leqslant t \leqslant n$;
- As raízes de $q(x)$ são $k - \omega_j \cdot \beta^{\frac{1}{m}}$ onde $\omega_j = cis\dfrac{2\pi j}{m}$, com $1 \leqslant j \leqslant m$.

Com isso, para as supostas raízes em comum, temos que:

$$\omega_t \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} = k - \omega_j \cdot \beta^{\frac{1}{m}}$$

Comparando as partes reais e lembrando da definição do k no início da solução, podemos concluir que:

$$\underbrace{\left(\cos\frac{2\pi t}{n} - 1\right)}_{<0,\text{ se }\cos\frac{2\pi t}{n}\neq 1} \cdot \alpha^{\frac{1}{n}} = \underbrace{\left(1 - \cos\frac{2\pi j}{m}\right)}_{>0,\text{ se }\cos\frac{2\pi j}{n}\neq 1} \cdot \beta^{\frac{1}{m}}$$

Portanto, exceto se $\cos\dfrac{2\pi t}{n} = \cos\dfrac{2\pi j}{n} = 1$, temos um absurdo, pela análise de sinais, pois α e β são números positivos. Daí, temos que:

$$\cos\frac{2\pi t}{n} = \cos\frac{2\pi j}{n} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha^{\frac{1}{n}} \text{ é a única raíz comum de } p \text{ e } q}$$

Por último, considerando o algoritmo euclidiano para cálculo de mdc adaptado para os polinômios com coeficientes racionais, podemos concluir que:

$$(4) \Rightarrow \left(x - \alpha^{\frac{1}{n}}\right) \Big| \underbrace{mdc\left(p(x), q(x)\right)}_{\in\mathbb{Q}[x]} \Rightarrow \left(x - \alpha^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow \boxed{\alpha^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{Q}}$$

Além disso, temos que:

$$k = \alpha^{\frac{1}{n}} + \beta^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \boxed{\beta^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{Q}}$$

■

Na questão anterior, o primeiro pensamento seria trabalhar com propriedades dos conjuntos racionais. Olhar soma, produto, talvez um binômio de Newton. Para visualizar a relação de tal solução com polinômio, eram necessários, novamente, olhos de águia. Percebamos, também, que não bastava visualizar que a questão tinha relação com polinômio, era necessário saber trabalhar com ele no contexto da questão.

Seguindo nossos estudos, vendo agora olhos de águia em questões de grafos.

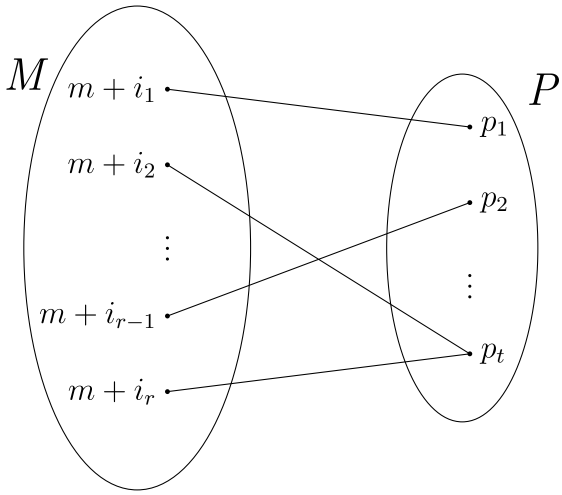
3 Questões que não parecem de grafos, mas não de grafos

A ideia dessa seção é mostrar questões que podem não aparentar ser de grafos, mas que são de grafos. Para mostrar como os olhos de águia podem precisar ir tão longe, comecemos, então, com uma questão de teoria dos números.

Problema 7 *(Cone Sul/TST - 2016)* Considere inteiros positivos m e n tais que $m > n^{n-1}$ e os números $m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+n$ são compostos. Prove que existem números primos positivos $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ distintos dois a dois tais que $m+k$ é divísivel por p_k para todo $k = 1, 2\cdots, n$.

Solução: Suponhamos que não seja. Daí, pelo teorema de Hall (também conhecido como teorema dos casamentos), isso implica que entre os números: $m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+r$, há r tais que a união dos fatores primos deles tem tamanho $t < r$.

Tomemos, então, o grafo bipartido formado por $m+i_1,\ m+i_2,\ \cdots,\ m+i_r$ e $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_t$ tais que existe areta entre $m+i_j$ e $p_\ell \Leftrightarrow p_\ell \mid m+i_j$. Seja $\mathbb{M}$ o conjunto formado por todos os números $(m+i_j)$, com $1 \leqslant j \leqslant r$ e P o conjunto formado por todos os primos p_ℓ, com $1 \leqslant \ell \leqslant t$. Nesse caso, teríamos algo que poderia ser o exemplo a seguir:



Daí, tomemos o subgrafo formado por p_ℓ e $m+i_{p_\ell}$, com $1 \leqslant \ell \leqslant t$, tal que, entre os elementos de M, $m+i_j$ é o que possui mais fatores primos p_j. Em outras palavras, seja:

$$m + i_{p_\ell} = \max\{\, v_{p_\ell}(m+i_j) \,|\, 1 \leqslant j \leqslant r\} \quad \forall 1 \leqslant \ell \leqslant t$$

(Se houver mais de um máximo, tome o maior deles)

Nesse subgrafo, temos que há t arestas saindo de P de forma que $t < r$ implica que há, pelo P.C.P., pelo menos, um elemento $m+i_x$ não recebendo arestas nesse subgrafo.

Seja p um primo tal que $p \mid m+i_x$. Daí, sendo $v_p(m+i_x) = \alpha$, então existe um $i_p \neq i_x$ tal que $v_p = (m+i_p) = \beta \geqslant \alpha$. Com isso, podemos concluir que:

$$\begin{cases} p^\alpha \mid m+i_x \\ p^\beta \mid m+i_p \overset{\beta\geqslant\alpha}{\Longrightarrow} p^\alpha \mid m+i_p \end{cases} \Rightarrow p^\alpha | \, i_p - i_x$$

Como $m+i_p$ e $m+i_x$ são dois números distintos entre $m+1$ e $m+n$, então temos que:

$$p^\alpha | \, |i_p - i_x| \Rightarrow \boxed{p^\alpha \leqslant |i_p - i_x| \leqslant n-1}$$

Daí, fazendo o processo acima para cada fator primo de $m+i_x$ e lembrando que $t \leqslant n-1$, afinal há menos fatores primos em P do que elementos em M, podemos concluir que:

$$m + i_x = \underbrace{q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_h^{\alpha_h}}_{\substack{\text{fatoração de } m+i_x \\ \text{em números primos}}} \leqslant (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)^h$$

$$\Rightarrow n^{n-1} < m + i_n \leqslant (n-1)^h \underbrace{\leqslant}_{h \leqslant t} (n-1)^t \underbrace{\leqslant}_{t \leqslant n-1} (n-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow n^{n-1} < (n-1)^{n-1} \Rightarrow \text{ Absurdo!}$$

■

No caso da questão anterior, foram necessários olhos de águia para atrelar a condição dada ao teorema de Hall (e também necessário saber o teorema de Hall, ressaltando aqui a importância do estudo técnico-qualificado).

Uma ideia mais conhecida é associar, de alguma forma, tabuleiros a grafos. Para quem não conhece tal ideia, que inclusive foi tema da questão 4 da *IMO/2018*, segue uma questão simples, apresentada pelo professor Carlos Yuzo Shine no artigo "Grafos e contagem dupla", presente na Eureka 12:

Problema 8 Usando apenas um tabuleiro 3×3 e cavalos das cores brancas e pretas, com movimentos dos cavalos do xadrez, é possível chegar na disposição apresentada na figura 2 partindo da configuração mostrada na figura 1?

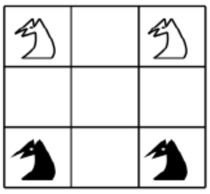


Figura 1

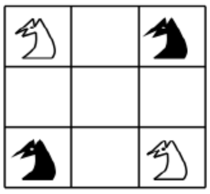


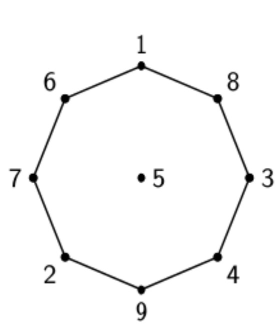
Figura 2

Solução:

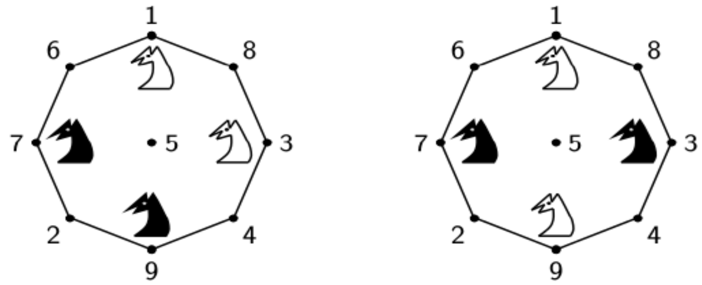
Vamos enumerar as casas do tabuleiro de 1 a 9 sendo 1 a da esquerda acima e 9 a da direita abaixo conforme podemos ver na figura seguinte:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Com base no tabuleiro numerado, consideremos um grafo com vértices $1, 2, \cdots, 9$ onde vamos conectar dois vértices i e j se e somente se é possível com um só movimento sair do vértice i e chegar no vértice j. Nesse caso, obteremos o seguinte grafo:



Agora, analisemos as figuras 1 e 2 do enunciado no grafo:



Como a ordem cíclica dos cavalos não pode mudar, isto é, um cavalo não pode ultrapassar o outro no grafo, concluímos, então que não é possível chegar na disposição apresentada na figura 2 partindo da configuração mostrada na figura 1. ■

Agora, aprofundemos a ideia de associar tabuleiros a grafos, mostrando como o olhar de águia pode ser importante numa questão.

Problema 9 *(Índia/TST - 2019)* Seja n um número natural. Um tabuleiro $2n \times 2n$ será coberto completamente por $2n^2$ dominós, cada um tamanho 1×2 ou 2×1. Consideremos duas coberturas completas: uma apenas com dominós verdes e outra apenas com dominós amarelos. Dizemos que duas casinhas 1×1 são *vizinhas verdes* quando ambas são cobertas pelo mesmo dominó verde. Dizemos que duas casinhas 1×1 são *vizinhas amarelas* quando ambas são cobertas pelo mesmo dominó amarelo. Suponhamos que seja possível atribuir um inteiro não-nulo a cada casinha 1×1, de tal modo que tal inteiro seja o número de seu vizinho verde menos o número de seu vizinho amarelo. Prove que n é múltiplo de 3.

4 Desafio

Encerremos a parte de questões resolvidas desse material com um desafio:

Problema 10 *(Vietnã/TST - 2018)* Seja a um número real no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$. Considere as sequências (u_n) e (v_n) definidas como:

$$u_n = \frac{3}{2^{n+1}} \cdot (-1)^{\lfloor 2^{n+1}a \rfloor} \quad , \quad v_n = \frac{3}{2^{n+1}} \cdot (-1)^{n+\lfloor 2^{n+1}a \rfloor}$$

a) Prove que:

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2018})^2 + (v_0 + v_1 + \cdots + v_{2018})^2 \leq 72a^2 - 48a + 10 + \frac{2}{4^{2019}}$$

b) Encontre todos os valores de a para os quais a igualdade ocorre no item anterior.

5 Exercícios extras

Problema 11 *(IMO/2018)* Um local é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20.
Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra. Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.