Princípio da Indução Finita

Edson Roberto Abe

27 / janeiro / 2020

1 - Prove que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; $\forall$ n $\in$ N*.

2 - Prove que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, $\forall$ n $\in$ N*.

3 - Observe que

$$1^2 = \frac{1.2.3}{6}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{3.4.5}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5.6.7}{6}$$

Obtenha a regra geral sugerida por estes exemplos, e prove-a.

4 - Prove que $n^3 - n$ é divisível por 6, $\forall$ n $\in$ N.

5 - Prove que $5.7^n - 3^n$ é divisível por 4, $\forall$ n $\in$ N.

6 - Demonstrar que para qualquer número natural n, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

7 - Prove que $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9, $\forall$ n $\in$ N.

8 - Prove que:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \ldots + \frac{1}{2020}.$$

9 - Prove que todos os números da forma 1007, 10017, 100117, ... são divisíveis por 53.

10 - Prove que todos os números da forma 12008, 120308, 1203308, ... são divisíveis por 19.

11 - A sequência a_n é definida como segue: $a_0 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3$, n > 0. Mostre que a_{10} contém mais do que 1000 noves na notação decimal.

12 - Prove que $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} < 2$, $\forall$ n $\in$ N.

13 - Seja n um inteiro positivo. Prove a desigualdade

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}.$$

14 - Seja n um inteiro positivo. Prove a desigualdade

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3.$$

15 - Prove que

$$2^{m+n-2} \geq mn$$

se m e n forem inteiros positivos.

16 - Usando $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, prove que:

a) $F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$

b) $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

17 - Seja F_i o i-ésimo termo na sequência de Fibonnaci. Prove que $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$.

18 (TM² – 2019) – Durante a aula de fatoração, Esmeralda observou que 1, 3 e 5 podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos, como se pode observar:

$1 = 1^2 - 0^2$

$3 = 2^2 - 1^2$

$5 = 3^2 - 2^2$

a) Mostre que todos os números escritos na forma $2*m+1$ podem ser escritos como diferença de dois quadrados perfeitos consecutivos.

b) Mostre como calcular o valor da expressão E = 1 + 3 + 5 + ... + (2m + 1).

c) Esmeralda, contente com o que descobriu, decidiu procurar outras formas de escrever 2019 como a diferença de dois quadrados perfeitos de inteiros positivos. Determine de quantas formas ela pode fazer o que deseja.

19 – Demonstrar que $10^{n+1} - 9n - 10$ é um múltiplo de 81 para todo inteiro positivo n.

20 – Demonstrar que $\frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} + \frac{7n}{15}$ é um inteiro positivo para todo inteiro positivo n.