Áreas de Polígonos

Professor Emiliano Augusto Chagas

Nessa aula vamos assumir alguns resultados relativos à triângulos isósceles, congruência de triângulos, Teorema de Pitágoras e áreas de polígonos.

1) A área de um retângulos de lados a e b é $a \cdot b$
2) A área de um quadrado de lado l é l^2
3) A área de um triângulo de base b e altura h relativa a essa base é $\frac{b \cdot h}{2}$
4) Os triângulos ABC e DEF são congruentes se:
   i. Os lados de um triângulo forem congruentes aos lados do outro triângulo (caso LLL)
   ii. Dois lados e o ângulo entre esses lados de um triângulo forem congruentes às mesmas partes no outro triângulo (caso LAL)
   iii. Um lado e os ângulos adjacentes a esse lado em um triângulo forem congruentes às mesmas partes no outro triângulo (caso ALA)
5) Um triângulo de hipotenusa a e catetos b e c é retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$
6) Em um triângulo isósceles de base b, a altura relativa a essa base coincide com a mediana

Exercícios para esquentar

01) Um paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos. Mostre que a área de um paralelogramo é o produto de uma das bases pela sua altura correspondente.

02) Um losango é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes. Mostre que a área de um losango é a metade do produto de suas diagonais.

03) Um trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados paralelos. Mostre que a área de um trapézio é o produto da média aritmética das bases paralelas pela altura relativa a essas bases.

04) As três alturas de um triângulo são menores que 1. É possível que a área desse triângulo seja maior que 100?

05) As três alturas de um triângulo são maiores que 2. Esse triângulo pode ter área menor que 2?

Problemas

06) Dado o quadrilátero convexo $ABCD$ e o ponto médio E da diagonal AC, calcule $[ABED]$ em termos de $[ABCD]$.

07) Se E e F são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, do quadrilátero convexo $ABCD$, calcular $[EBFD]$ em termos de $[ABCD]$.

08) Dado o retângulo $ABCD$ e os pontos médios E e F dos lados BC e CD respectivamente, encontre $[AEF]$ em termos de $[ABCD]$.

09) Prove que a área de um octógono regular é o produto de sua diagonal maior pela sua diagonal menor.

10) Considere um hexágono inscritível $ABCDEF$, ou seja, todos os pontos desse hexágono estão sobre a mesma circunferência. As diagonais AD, BE e CF são diâmetros dessa circunferência. Prove que $[ABCDEF]=2[ACE]$.

11) As diagonais de um trapézio $ABCD$ se intersectam em O. Mostre que os $[AOD]=[BOC]$ possuem a mesma área. Na verdade a recíproca também vale, se ocorre que $[AOD]=[BOC]$, então $ABCD$ é um trapézio.

12) Dado o retângulo $ABCD$, considere E como ponto médio de AB e F como a intersecção de DE com a diagonal AC. Calcule $[ECF]$ em termos de $[ABCD]$.

13) Dado o quadrilátero convexo $ABCD$, traçe uma reta a partir de um vértice que divida esse quadrilátero em duas figuras de mesma área.

14) Mostre que com as medianas de um triângulo ABC podemos construir um triângulo e calcule a área desse triângulo em termos de $[ABC]$

Dicas e soluções

01) Trace uma altura de um dos vértices que encontre um lado oposto, identifique um triângulo retângulo que consegue preencher o paralelogramo de modo que esse vire um retângulo.

02) Utilizando congruências de triângulos é possível mostrar que em um paralelogramo (veja que um losango é um paralelogramo) as diagonais se encontram no ponto médio. Nesse caso os triângulos isósceles indicam que as medianas são alturas, e basta calcular a área de quatro triângulos retângulos.

03) Trace uma reta pelos pontos médios dos lados não paralelos. Basta torcer e encaixar a parte de cima na parte de baixo para transformar a figura em um paralelogramo, em que a nova base sera a soma das bases e a altura será a metade da altura original.

04) Sim! Seja ABC um triângulo isósceles de base AB = 800 e altura CD = 0,3. A altura AH correspondente ao vértice A verifica AH = 2DK, sendo K no lado BC e DK perpendicular a BC. Como DK < DC, então AH < 0,6 e as alturas desse triângulo são menores que 1. Calculando a área do triângulo percebemos que ela é maior que 100.

05) Não! Veja que ao traçar as alturas formamos triângulos retângulos, cujas hipotenusas são os lados dos triângulos. Mais ainda, as hipotenusas são maiores que os catetos, então cada lado do triângulo é maior que 2. Calculando a área do triângulo com qualquer lado como base, e altura como um valor maior que 2 temos que a área será maior que 2.

06) $[ABED]=\frac{[ABCD]}{2}$

07) $[EBFD]=\frac{[ABCD]}{2}$

08) $[AEF]=\frac{3}{8}[ABCD]$

09) As diagonais maior e menor são perpendiculares, trace as duas diagonais maiores e menores e identifique uma transposição de triângulos retângulos para transformar o octógono em um retângulo.

10) Ao traçar os diâmetros identificamos três pares de triângulos congruentes, separados pelo ângulo oposto cujo vértice é o centro O da circunferência. Ao colocar os vértices no mesmo sentido na circunferência, temos que $[ODC]=[OAC]$. Ao fazer construções análogas mostramos que o triângulo ACE é composto por três triângulos distintos daqueles pares que compõem o hexágono original.

11) Veja que $[ADC]=[BCD]$.

12) $[ECF]=\frac{1}{6}[ABCD]$

13) Transformamos esse quadrilátero em um triângulo de mesma área da seguinte forma: trace a diagonal AC, prolongue o lado BC e trace uma reta paralela ao lado AC que passe pelo ponto D até encontrar o prolongamento de BC, vamos chamar essa intersecção de C'. Veja que no triângulo ABC' o ponto médio M de BC' divide esse triângulo em duas regiões de mesma área, então é só olhar o quadrilátero original.