Introdução à teoria das partições de inteiros

XXIII SEMANA OLÍMPICA – Nível 3

George Lucas

Definição: Uma *partição* de um inteiro positivo n é uma maneira de representá-lo como soma de inteiros positivos onde a ordem das parcelas pode ou não importar (chamadas no primeiro caso de partição ordenada e, no segundo caso, de partição não-ordenada).

Por exemplo:

- $1+1+3$ é uma partição de 5.
- $7+5+2$ é uma partição de 14.
- $1+1+1+1+1+1$ é uma partição de 6.
- 11 é uma partição de 11.

Veja que temos 8 partições ordenadas do número 4. São elas:

$1+1+1+1$	$1+1+2$	$1+2+1$	$2+1+1$
$2+2$	$1+3$	$3+1$	4

Enquanto temos apenas 5 partições não-ordenadas do mesmo número. São elas:

$1+1+1+1$	$1+1+2$	$2+2$	$1+3$	4

Dada uma partição Π de um número n, chamamos cada parcela dessa partição de *parte*.

Teorema 1. O número de partições ordenadas de um inteiro positivo n é 2^{n-1}.

Prova: Para cada inteiro positivo n, seja c_n a quantidade de partições ordenadas de n.
Veja que dado $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, a quantidade de partições Π de n cuja primeira parte é k é c_{n-k}, pois as demais partes (na ordem em que se encontram) formam uma partição de $n-k$. Além disso, n é a partição de n restante.

Logo,

$$c_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}$$

Aplicando indução forte com base $c_1 = 1$, está provado o teorema. □

Teorema 2. Sejam k, n inteiros positivos. O número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

é $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Prova: Imagine um conjunto com n bolinhas e $k-1$ pauzinhos.

$$\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{n}\ \underbrace{||\ldots|}_{k-1}$$

A ideia é associar, bijetivamente, cada permutação dos elementos desse conjunto com uma solução de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Dada uma permutação desses elementos, seja x_p a quantidade de bolinhas entre o $(p-1)$-ésimo pauzinho e o p-ésimo pauzinho, para $2 \leq p \leq k-1$, x_1 a quantidade de bolinhas antes do primeiro pauzinho e x_k a quantidade de bolinhas após o último pauzinho.

Por exemplo, para $n = 6$, $k = 5$ e a permutação

$$|\circ\circ\ ||\circ\circ\circ\ |\circ$$

temos $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 1$.

Assim, obtemos a nossa bijeção!

Veja que contar a quantidade de permutações é bem simples, uma vez que basta escolhermos as posições dos $(k-1)$ pauzinhos dentre os $n+k-1$ objetos (bolinhas e pauzinhos). Temos então $\binom{n+k-1}{k-1}$ permutações.

Logo, está provado o teorema. □

Corolário. Sejam $k \leq n$ inteiros positivos. A quantidade de partições ordenadas de n com k partes é $\binom{n-1}{k-1}$

Prova: $y_1 + y_2 + \cdots + y_k$ é uma partição ordenada de n se, e somente se, $x_i \coloneqq y_i - 1 \geq 0$ é solução de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n - k$$

Pelo teorema acima, esta equação tem $\binom{n-k+k-1}{k-1}$ soluções. Segue então o corolário. □

A partir desse ponto, a menos que deixemos claro do contrário, quando falarmos de partições de n estaremos considerando apenas as partições não-ordenadas de n, e representaremos tais partições em ordem decrescente das partes. Denotemos a quantidade de partições de n por $p(n)$. Definamos também $p(0) = 1$.

A função geratriz da sequência $\{p(n)\}$

Teorema 3. Dado $S \subset \mathbb{N}$, seja $p(n|S)$ a quantidade de partições de n cujas partes pertencem a S e $p(0|S) = 1$. Então a função geratriz de$\{p(n|S)\}_{n\geq 0}$ é dada por

$$\sum_{n\geq 0} p(n|S)x^n = \prod_{s\,\in\,S} \frac{1}{1-x^s}$$

Prova: Contar a quantidade de partições de n cujas partes pertencem a S é o mesmo que contar a quantidade de soluções não-negativas $(\alpha_r)_{r\in S}$ de

$$\sum_{r\in S} \alpha_r r = n,$$

pois podemos levar, bijetivamente, cada solução dessa equação na partição em que, para cada $r \in S$, a parte r aparece α_r vezes.

Daí, como a quantidade de soluções dessa equação é o coeficiente de x^n no produto

$$\prod_{r \in S} \left(\sum_{\alpha_r \geq 0} x^{\alpha_r r} \right) = \prod_{r \in S} (1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \cdots)$$

e

$$1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \cdots = \frac{1}{1 - x^r},$$

segue o lema. □

Corolário.

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x^n}$$

Prova: Tome $S = \mathbb{N}$.

□

<u>Observação</u>: Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos.

Uma maneira alternativa de representar as partições: O gráfico de Ferrers

Dado um inteiro positivo n e uma partição $a_1 + a_2 + \cdots + a_k, a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$, de n, podemos representar graficamente essa partição por um conjunto de n pontos distribuídos em k linhas de modo que a j-ésima linha tenha a_j pontos, para todo $j \in \{1,2, \ldots, k\}$. Essa representação é chamada *representação por gráfico de Ferrers*.

Exemplos:

A partição $6 + 5 + 3 + 3 + 2$ tem representação:

●●●●●●
●●●●●
●●●
●●●
●●

A partição 7 tem representação:

●●●●●●●

A partição $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ tem representação:

●
●
●
●
●

Definamos também a *conjugada* de uma partição Π como a partição obtida ao tomar a transposta do gráfico de Ferrers da partição Π, isto é, refletindo o gráfico em relação a diagonal principal, ou seja, trocando as linhas pelas colunas.

Por exemplo, as partições conjugadas das 3 partições acima são, respectivamente,

● ● ● ● ●	●	● ● ● ● ●
● ● ● ● ●	●	
● ● ● ●	●	
● ●	●	
● ●	●	
●	●	
	●	

Isto é, são as partições $5 + 5 + 4 + 2 + 2 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ e 5, respectivamente.

Observe que a conjugada da conjugada de Π é a própria Π. Além disso, Π e sua conjugada são partições de um mesmo número, uma vez que ao tomarmos a transposta de um gráfico de Ferrers, a quantidade de pontos não muda!
Dizemos também que uma partição é *autoconjugada* se ela é a sua própria conjugada.

Por exemplo, as partições $2 + 2$, $3 + 2 + 1$, $7 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ são autoconjugadas (Verifique!).

Mas então, de que maneira o gráfico de Ferrers pode ser útil na nossa vida?

Vejamos abaixo um exercício no qual tal gráfico é uma ferramenta extremamente poderosa:

Exercício: Sejam $k \leq n$ inteiros positivos. Prove que a quantidade de partições de n tendo k como maior parte é exatamente igual ao número de partições de n com exatamente k partes.

Solução: Seja A o conjunto das partições de n tendo k como maior parte e B o conjunto das partições de n com exatamente k partes.
Cada partição de A possui sua conjugada em B, e vice-versa. Isso nos garante uma bijeção entre os dois conjuntos que associa cada elemento de A ao seu conjugado em B. Portanto, $|A| = |B|$.

□

Recorrências para $\{p(n)\}$

A relação entre as funções p e σ e a primeira recorrência para $\{p(n)\}$

Teorema 4. Dado $S \subset \mathbb{N}$, defina $\sigma^*(n)$ a soma dos divisores positivos de n pertencentes a S (Em particular, se não existem divisores de n em S, $\sigma^*(n) = 0$) e defina $p^*(n) = p(n|S)$ a quantidade de partições de n com partes em S. Então, para todo inteiro positivo n vale:

$$\mathrm{p}^*(\mathrm{n}) = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \sigma^*(\mathrm{k}) \mathrm{p}^*(\mathrm{n}-\mathrm{k})$$

Prova: Dada uma partição Π de n, seja $w(\Pi)$ a soma das partes de Π. É claro que $w(\Pi) = n$ para toda Π. Isso nos dá que:

$$\sum_{\substack{\Pi \text{ partição de n} \\ \text{com partes em S}}} w(\Pi) = n\, p^*(n)$$

Considere agora um inteiro positivo $t \leq n$ com $t \in S$. Ao listarmos todas as partições de n, quantas vezes a parte t aparece?

Veja que $p^*(n - th)$ conta as partições em que t aparece pelo menos h vezes, pois as demais partes de cada uma dessas partições formam uma partição de $n - th$.
Então as partições em que t aparece exatamente h vezes é

$$p^*(n - th) - p^*(n - (t+1)h)$$

Observação: Aqui podemos definir $p^*(u) = 0$ para $u < 0$.

Assim, a quantidade de partes t é

$$\sum_{h \geq 1} h\,(p^*(n - th) - p^*(n - (t+1)h)) = \sum_{h \geq 1} p^*(n - th)$$

Com isso,

$$\sum_{\substack{\Pi \text{ partição de n} \\ \text{com partes em S}}} w(\Pi) = \sum_{t \in S} t \sum_{h \geq 1} p^*(n - th) = \sum_{\substack{t \in S \\ h \geq 1}} t\, p^*(n - th)$$

Sendo $0 \leq k < n$, então $n - th = k \leftrightarrow h = \frac{n-k}{t}$. Daí,

$$\sum_{\substack{t \in S \\ h \geq 1}} t\, p^*(n - th) = \sum_{k=0}^{n-1} p^*(k) \sum_{\substack{t \in S \\ \frac{n-k}{t} \in \mathbb{Z}}} t = \sum_{k=0}^{n-1} p^*(k) \sigma^*(n-k)$$

Logo,

$$n\,p^*(n) = \sum_{\substack{\Pi \text{ partição de n} \\ \text{com partes em S}}} w(\Pi) = \sum_{k=0}^{n-1} p^*(k)\sigma^*(n-k).$$

Está provado o teorema!

$\square$

Corolário. Para todo inteiro positivo n vale

$$\mathrm{p(n)} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \sigma(\mathrm{k})\mathrm{p(n-k)}$$

Prova: Tome $S = \mathbb{N}$.

$\square$

O teorema dos números pentagonais de Euler e a segunda recorrência para $\{p(n)\}$

Teorema 5.

$$\prod_{n\geq 1}(1-x^n) = 1 + \sum_{j\geq 1}(-1)^j(x^{j(3j+1)/2} + x^{j(3j-1)/2})$$

Prova: Defina como $p^e(n)$ o número de partições de n com um número par de partes e as partes distintas e $p^o(n)$ o número de partições de n com um número ímpar de partes e as partes distintas.

Claro que $p^e(n) + p^o(n)$ denota a quantidade de partições de n com partes distintas, então

$$\prod_{n\geq 1}(1+x^n) = \sum_{n\geq 0}(p^e(n) + p^o(n))x^n$$

(Por definição $p^e(0) = 1 \; e \; p^o(0) = 0$)

Usando o mesmo argumento acima, vemos que

$$\prod_{n\geq 1}(1-x^n) = \sum_{n\geq 0}(p^e(n) - p^o(n))x^n$$

Vamos mostrar então que

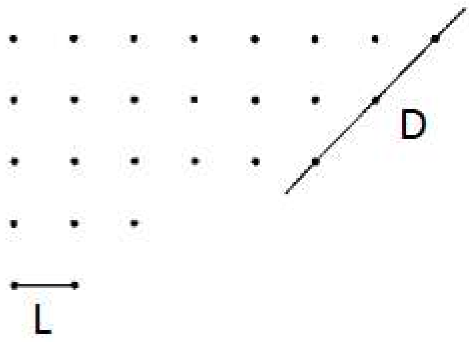
$$p^e(n) - p^o(n) = \begin{cases}(-1)^j, se\; n = j(3j \pm 1)/2 \\ \quad 0, caso\; contrário\end{cases}$$

Considere o gráfico de Ferrers de uma partição de n com partes distintas. Nessa partição considere os subconjuntos de pontos L e D dados por:

- L é o conjunto dos pontos da última linha do gráfico de Ferrers;

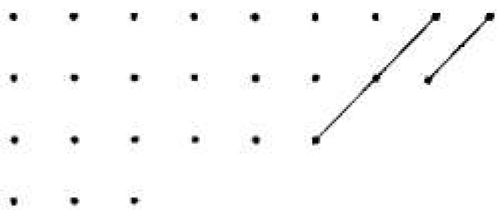
- Sendo t a quantidade de pontos na primeira linha e r o maior inteiro positivo tal que a linha r possui $t+1-r$ pontos, então D é o conjunto dos últimos pontos de cada uma das r primeiras linhas.

Por exemplo, na partição $8+7+6+3+2$, temos:

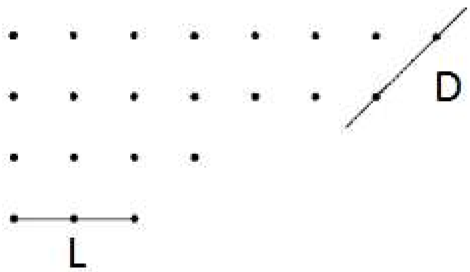


Se $L \cap D = \emptyset$, então:

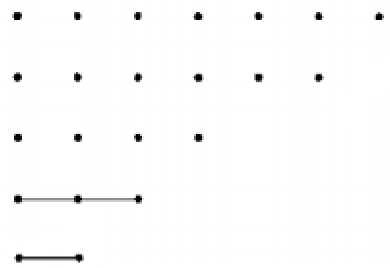
- Se $|L| \leq |D|$,considere a transformação deslocando a linha L de modo que cada ponto de L seja agora o último ponto de cada uma $|L|$ primeiras linhas. Por exemplo, no exemplo acima obtemos o gráfico



- Se $|L| > |D|$, considere a transformação deslocando o conjunto D de modo que ele seja agora a última linha do gráfico. Por exemplo, na partição $8+7+4+3$ temos a representação



Após a transformação obtemos



Mas o que acontece quando temos $L \cap D \neq \emptyset$?

- Bem, se $|L| \geq |D| + 2$ essa transformação ainda funciona, deslocando os $|D|$ pontos formando uma linha abaixo da linha com $|L| - 1$ pontos.

- E ainda, se $|D| > |L|$ essa transformação também funciona, basta deslocar os $|L|$ pontos formando uma nova diagonal ao lado de $D \setminus L$.

Essa transformação nos dá uma bijeção entre o número de partições de n com um número par de partes, partes distintas e tal que$|L| - |D| \notin \{0,1\}$ ou $L \cap D = \emptyset$ e o número de partições de n com um número ímpar de partes, partes distintas e tal que$|L| - |D| \notin \{0,1\}$ ou $L \cap D = \emptyset$.

Analisemos agora os casos em que $|L| - |D| \in \{0,1\}$ e $L \cap D \neq \emptyset$.

- Se $|L| = |D|$:

Seja $t = |D|$, então $n = t + (t+1) + (t+2) + \cdots + (2t-1) = t(3t-1)/2$.
Daí, para n da forma $t(3t-1)/2$ existe uma única partição que não é possível realizar a transformação acima. Como essa partição tem t partes, $p^e(n) - p^o(n) = (-1)^t$.

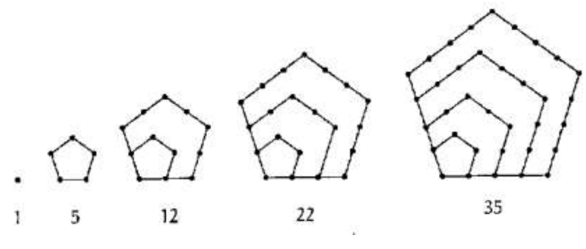
- Se $|L| = |D| + 1$:

Seja $t = |D|$, então $n = (t+1) + (t+2) + \cdots + (2t) = t(3t+1)/2$.
Daí, para n da forma $t(3t+1)/2$ existe uma única partição que não é possível realizar a transformação acima. Como essa partição tem t partes, $p^e(n) - p^o(n) = (-1)^t$.

Com isso, está provado o teorema.

□

Esse teorema é conhecido como *Teorema dos números pentagonais de Euler* uma vez que a j-ésima figura seguindo a sequência abaixo é formada por $j(3j-1)/2$ pontos.



Corolário. Para todo inteiro positivo n temos que

$$p(n) = \sum_{j\geq 1}(-1)^{j+1}(p(n-\frac{j(3j-1)}{2}) + p(n-\frac{j(3j+1)}{2}))$$
$$= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \cdots$$

Prova: Pela função geratriz de $\{p(n)\}$, obtemos:

$$(\prod_{n\geq 1}(1-x^n))(\sum_{n\geq 0} p(n)x^n) = 1$$

Então, pelo teorema dos números pentagonais de Euler, obtemos:

$$(1+\sum_{j\geq 1}(-1)^j(x^{j(3j+1)/2} + x^{j(3j-1)/2}))(\sum_{n\geq 0} p(n)x^n) = 1$$

Igualando os coeficientes em cada lado da equação obtemos a recorrência desejada. □

Observação: Caso seja conveniente, definimos $p(u) = 0$ para $u < 0$.

Estimativa para $p_k(n)$

Para inteiros positivos $k \leq n$, defina $p_k(n)$ o número de partições de n em k partes.

Teorema 6. Fixo k inteiro positivo, temos que $p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_k(n)}{n^{k-1}} = \frac{1}{k!\,(k-1)!}$$

Prova: Se $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$, então as $k!$ permutações de $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ representam uma partição ordenada, não necessariamente todas distintas. Daí, pelo corolário do teorema 2,

$$k!\,p_k(n) \geq \binom{n-1}{k-1}$$

Por outro lado, se $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$, defina $y_i \coloneqq x_i + (k-i)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Os inteiros y_i são distintos e satisfazem $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n + \frac{k(k-1)}{2}$. Daí, pelo corolário do teorema 2,

$$k!\,p_k(n) \leq \binom{n+\frac{k(k-1)}{2}-1}{k-1}$$

O resultado segue. □

O comportamento da função p

Teorema 7. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$p(n) \leq e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log\, p(n)}{\sqrt{n}} = \pi\sqrt{2/3}\,.$$

A prova desse teorema é bastante extensa e o aluno interessado poderá encontrá-la em [2] (ver referências).

<u>Observação</u>: Aqui o logaritmo é visto na base e.

Exercícios

Exercício 1. Seja $b > 1$ um inteiro positivo dado. Para cada inteiro positivo n, quantas são as partições de n cujas partes são potências de b e cada parte aparece menos que b vezes?
Observação: Uma potência de b é um número da forma b^k, com k inteiro não-negativo.

Exercício 2. Sejam $k \leq n$ inteiros positivos. Prove que o número de partições de n com partes menores ou iguais a k é igual ao número de partições de n com, no máximo, k partes.

Exercício 3. Prove que o número de partições de n com partes maiores que 1 é

$$p(n) - p(n-1).$$

Exercício 4. (China TST) Determine o maior inteiro positivo n que não excede 2007 tal que o coeficiente de x^n na expansão de

$$(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{2007}-1)$$

é não-nulo. Determine tal coeficiente.

Exercício 5. (Putnam) Sejam $\alpha(n)$ o número de partições ordenadas de n com partes pertencentes a $\{1, 2\}$ e $\beta(n)$ o número de partições ordenadas de n com as partes maiores que 1. Prove que $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

Exercício 6. Prove que

$$2p(n) - p(n-1) \leq p(n+1) \leq p(n) + p(n-1)$$

para todo $n \geq 2$.

Exercício 7. Seja $f(n)$ o número de partições ordenadas de n cujas partes pertencem a $\{1, 3, 4\}$. Prove que $f(n)$ é quadrado perfeito para todo n par.

Exercício 8. Prove que para todo $n \geq 5$, o número de partições de n em partes ímpares é maior que o número de partições de n em partes pares.

Exercício 9. Prove que o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

Exercício 10. Prove que o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas.

Exercício 11. Mostre que o número e partições de n em partes distintas, nenhuma múltipla de 3, é igual a $p(n|\{6\mathrm{j}-1, 6\mathrm{j}-5 \;/\; \mathrm{j} \in \mathbb{N}\})$.

Exercício 12. Prove que o número de partições de n em que apenas as partes ímpares podem ser repetidas é igual ao número de partições de n em que nenhum parte aparece mais do que 3 vezes.

Exercício 13. Seja $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 2, 3, 6,9 \ ou \ 10 \ (mod \ 12)\}$. Prove que o número de partições de n em que cada parte aparece $2, 3 \ ou \ 5$ vezes é igual a $p(n|S)$.

Exercício 14. Prove que o número de partições de n onde cada parte aparece no máximo k vezes é igual ao número de partições de n onde cada parte é não-divisível por $k+1$.

Exercício 15. Seja P_n o conjunto das partições de n. Dada $\pi = a_1 + a_2 + \cdots + a_r \in P_n$, definimos $a(\pi) = |\{j \leq r | a_j = 1\}|$ o número de partes 1 na partição π e $b(\pi) = |\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}|$ o número de termos distintos na partição π. Prove que

$$\sum_{\pi \in P_n} a(\pi) = \sum_{\pi \in P_n} b(\pi)$$

Exercício 16. Seja $P_k(n)$ o número de partições de n com k partes. Prove que:

(a) $P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$, para todos inteiros positivos $k \leq n$

(b)

$$P_k(n) = \sum_{s=1}^{k} P_s(n-k)$$

Problemas

Problema 1. Seja n um inteiro positivo. Alice e Bruno jogam o seguinte jogo: eles constroem uma partição de n da seguinte forma: Inicialmente, Alice escolhe um inteiro positivo $a_1 < n$. Depois Bruno escolhe um inteiro positivo $a_2 \leq a_1$ tal que $a_1 + a_2 \leq n$. Em seguida, Alice escolhe um inteiro positivo $a_3 \leq a_2$ tal que $a_1 + a_2 + a_3 \leq n$. O jogo continua, alternando os jogadores, até obtermos uma partição $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ de n. Se k é ímpar, Alice vence; caso contrário, Bruno vence. Determine, em função de n, quem tem a estratégia vencedora.

Problema 2. Prove que para todo inteiro positivo n,

$$2^{\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 2} \leq p(n) \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor n^{2\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$$

Problema 3. Seja n um inteiro positivo e $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Seja Π uma partição de n com as partes pertencentes a A tal que não existe uma partição de n com as partes pertencentes a A e menos partes que Π. Prove que Π possui, no máximo, $(6n)^{1/3}$ partes distintas.

Problema 4. Prove a identidade do produto triplo de Jacobi: se $x, y \in \mathbb{C}, 0 < |x|, |y| < 1$:

$$\prod_{m=1}^{\infty}[(1 - x^{2m})(1 + x^{2m-1}y^2)(1 + x^{2m-1}y^{-2})] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^{n^2}y^{2n}$$

Problema 5. Para todo inteiro positivo n, prove que

$$p(n) = \sum p(a)p(b)$$

Onde a soma varia sobre todas as triplas de inteiros não-negativos (a, b, c) tais que $2a + 2b + \frac{c(c+1)}{2} = n$.

Problema 6. (APMO) Seja $A(n)$ o número de sequências $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ de inteiros positivos para as quais $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ e cada $(a_i + 1)$ é uma potência de $2 (i = 1, 2, \dots, k)$. Seja $B(n)$ o número de sequências $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$ de inteiros positivos para as quais $b_1 + b_2 + \cdots + b_m = n$ e $b_j \geq 2b_{j+1}$ para todo $j = 1, 2, \dots, m - 1$. Prove que $A(n) = B(n)$ para todo inteiro positivo n.

Problema 7. (APMO) Um inteiro positivo é chamado *fancy* se ele pode ser escrito na forma

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}$$

Onde $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ são inteiros não-negativos que não são, necessariamente, distintos. Determine o menor inteiro positivo n tal que nenhum múltiplo de n é fancy.

Problema 8. (IMO) Para n inteiro positivo, seja $f(n)$ o número de maneiras de representar n como soma de potências de 2 com expoentes inteiros não-negativos (representações que diferem apenas na ordem das parcelas são consideradas iguais). Prove que

$$2^{n^2/4} < f(n) < 2^{n^2/2}$$

Para todo inteiro $n \geq 3$.

Problema 9. (China TST) Seja $p(n)$ o número de partições de n. Ache todos os inteiros positivos n tais que $p(n) + p(n + 4) = p(n + 2) + p(n + 3)$.

Problema 10. (Vingança Olímpica) Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \backslash S$ é finito. Seja A_i o número de partições de i com todas as partes em S. Prove que existe N tal que $A_{i+1} > A_i$ para todo $i > N$.

Problema 11. (Vingança Olímpica) Seja n um inteiro positivo. Dizemos que um par formado por uma permutação $\pi: \{1,2, \dots, n\} \to \{1,2, \dots, n\}$ e uma coloração $C: \{1,2, \dots, n\} \to \{0,1\}$ é vingativo se:

- Para todo $i \in \{1,2, \dots, n\}$, existe $j \in S_i$ com $C(j) = 1$;
- Se $C(k) = 1$, então k está entre os $1 + v_2(|S_k|)$ maiores elementos de S_k.

Aqui, denotamos $S_i \coloneqq \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \pi(\pi(\pi(i))), \dots\}$ e $v_2(t)$ o expoente da maior potência de 2 que divide t.

Seja V a quantidade de pares vingativos e P o número de partições de n com todas as partes sendo potências de 2. Determine V/P.

<u>Observação:</u> Uma potência de 2 é um número da forma 2^k, onde k é um inteiro não-negativo.

Problema 12. (IMO Shortlist) Seja S um subconjunto não-vazio dos inteiros positivos. Dizemos que um inteiro positivo n é *clean* se ele possui representação única como soma de uma quantidade ímpar de elementos distintos de S. Prove que existem infinitos inteiros positivos que não são clean.

Problema 13. (China TST) Uma partição P de um inteiro positivo n é uma n-úpla de inteiros não-negativos $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} kx_k = n$$

Para um inteiro positivo $m \leq n$ e uma partição $Q = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, Q é chamado *compatible* com P se $y_i \leq x_i$ para todo $i \in \{1,2, \dots, m\}$. Seja $S(n)$ o número de partições P de n tal que cada ímpar $m < n$ possui exatamente uma partição compatible com P e cada par $m < n$ possui exatamente duas partições compatible com P. Determine $S(2010)$.

Referências:

[1] J. P. de Oliveira dos Santos. Introdução à teoria dos números

[2]F. B. Martinez, C. G. Moreira, N. Saldanha, E. Tengan. Teoria dos números, um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro

[3] J. H. van Lint, R. M. Wilson. A course in Combinatorics