Grafos: Ciclos e árvores

Gustavo Empinotti - gustavoempinotti@gmail.com

Janeiro 2020

Definição: Um *grafo* é um conjunto de vértices (V) e arestas (A) que ligam esses vértices. Formalmente, temos $G = (V, A)$ onde $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e A é um subconjunto de $V \times V$ que determina quais arestas "existem" (por exemplo, se $(v_1, v_2) \in A$, então v_1 e v_2 estão ligados.

Ciclos e árvores: Um *ciclo* em um grafo é um subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de V tal que $v_i v_{i+1} \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, m$, com índices módulo m (isto é, $v_{m+1} = v_1$).

Um grafo é chamado de *árvore* se ele não tem ciclos.

- Uma árvore conexa de n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas.
- Em particular, grafos conexos de n vértices têm no mínimo $n - 1$ arestas
- Um vértice de grau 1 é chamado de *folha*. Toda árvore tem ao menos duas folhas.

Deletar ciclos mantém conexidade: Uma ideia importante é que se você escolhe um ciclo em um grafo e deleta uma de suas arestas, ele continua conexo (por quê?).

Árvore geradora: Usando a ideia acima, para qualquer grafo conexo podemos deletar arestas de ciclos sem quebrar sua conexidade, até que cheguemos a uma árvore (subgrafo do grafo original) que passa por todos os vértices. Chamamos essa árvore de *árvore geradora*, e em muitos problemas é útil focar nela.

1. (BAMO 2005) Há 1000 cidades no país de Euleria, e alguns pares de estradas são ligados por estradas de terra. É possível chegar de qualquer cidade a qualquer outra através dessas estradas. Prove que o governo de Euleria pode pavimentar as estradas de forma que cada cidade tenha uma quantidade ímpar de estradas pavimentadas levando a ela.

2. (MOP Test 2008) Seja G um grafo completo de n vértices. As arestas de G são coloridas de forma que nenhuma cor é usada em mais de $n - 2$ arestas. Prove que existe um triângulo com três cores.

3. **Lema:** Um grafo é bipartido se e somente se ele não tem ciclos ímpares (prove).

4. (IMOSL 2004) A seguinte operação é permitida num grafo finito: escolha um ciclo qualquer de tamanho 4 (se existir), escolha uma aresta no ciclo e delete-a. Para $n \geq 4$, encontre o menor número de arestas que pode ser atingido com essa operação partindo-se de um n-clique.

5. (RMM 2019) Dado qualquer real $\epsilon > 0$, prove que, para todos exceto uma quantidade finita de inteiros positivo n, qualquer grafo simples com n vértices e pelo menos $(1 + \epsilon)n$ arestas tem dois ciclos simples distintos de tamanhos iguais.

   Nota: um grafo *simples* é um grafo sem *loops* (arestas que ligam um vértice a si próprio) e sem arestas duplas (mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices).

   Um ciclo *simples* é um ciclo sem arestas nem vértices repetidos.

   O tamanho de um ciclo é a sua quantidade de vértices.

Ciclos em permutações: Cada permutação $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ de $1, 2, ..., n$ define um multigrafo orientado cujos vértices são os números $1, 2, ..., n$ e existe uma aresta de i para j se e somente se $\sigma(i) = j$. Esse multigrafo é uma união de ciclos. (Multigrafos são como grafos, mas podem ter arestas ligando vértices a si mesmos e mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértices).

6. (TST Romênia 2003) Em um torneio com $2n$ participantes, cada um deles inventa seu próprio problema. Cada um dos $2n$ problemas é distribuído entre os participantes e cada um fica com um problema. Uma distribuição é balanceada quando existem n participantes cujos problemas foram distribuídos para os outros n participantes e vice-versa. Prove que o número de distribuições balanceadas é um quadrado perfeito.