



OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
XXIII Semana Olímpica - Natal/RN.
27 a 31 de janeiro de 2020.

Prof. Iesus Carvalho Diniz - DMAT UFRN.

Calculando Limites com Probabilidade

Nível universitário.

1 Resumo teórico

1.1 Espaço Amostral

1.2 Variável Aleatória

1.3 Convergência de Variáveis Aleatórias

1.4 Lei Forte e Lei Fraca dos Grandes Números

1.5 Teorema do Limite Central

1.6 Exemplos

1. Sejam $\lambda > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-n} n^k}{k!}.$$

2. (Polinômios de Bernstein) Sejam $x \in [0, 1]$, f uma função contínua em x e

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \text{ Prove que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = f(x).$$

1.7 Exercícios Propostos

1. (Problema de Ocupação) Considere a distribuição de r bolas distintas em n caixas com o espaço amostral consistindo de n^r pontos igualmente prováveis. Se N_n o número de caixas vazias, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(N_n)}{n} = e^{-c}, \text{ em que } \frac{r}{n} \rightarrow c.$$

2. Seja X_i uma variável aleatória que representa o valor observado no i -ésimo lançamento de um dado cujas faces são numeradas de 1 a 6. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\prod_{i=1}^n X_i \leq e^{3,5n} \right).$$

3. Em um grupo de n pessoas, qual a probabilidade de que três quaisquer delas não façam aniversário no mesmo dia?