Semana Olímpica
Nível 1
Profª. Kellem Corrêa
Sexta-feira 31/01/2020

Divisibilidade e Aritmética Modular

Teorema (Algoritmo da Divisão): Dados D e d inteiros positivos, existem únicos q e r inteiros não negativos tais que D = dq + r, r < a. O número q é o quociente e o número r é o resto da divisão de D por d. Quando o resto r = 0, dizemos que D é múltiplo de d, ou d é divisor de D (d | D).

Propriedades: Para a, b, c, d inteiros:

(i) Se d|a e d|b, então d|(ax + by), para quaisquer x e y inteiros

(ii) Se d|a, então a = 0 ou |d|≤|a|

(iii) Se a|b e b|c, então a|c

Critério de Divisibilidade por 7: Para verificar se um número é múltiplo de 7, apaga-se o último dígito e subtrai-se deste novo número o dobro do último dígito que fora apagado. Se o resultado for múltiplo de 7, então o número original também o é.

Ex: 16464 é múltiplo de 7, pois:

1646 – 8 = 1638
163 – 16 = 147
14 – 14 = 0

Aquecimento 1) Prove que esse critério funciona!

Critério de Divisibilidade por 11: Para verificar se um número é múltiplo de 11, somam-se os algarismos de ordem par (chame essa soma de A) e somam-se os de ordem ímpar (chame essa soma de B). Caso A – B seja múltiplo de 11, então o número original é múltiplo de 11.

Ex: 81719 é múltiplo de 11, pois:

A = 8 + 7 + 9 = 24
B = 1 + 1 = 2
A – B = 22 = 2*11

Aquecimento 2) Prove que esse critério funciona!

Dizemos que os inteiros a e b são congruentes módulo m se eles deixam o mesmo resto quando divididos por m. Denotaremos isso por a ≡ b (mod m). Por exemplo, 7 ≡ 2 (mod 5), 9 ≡ 3 (mod 6), 37 ≡ 7 (mod 10) mas 5 ≢ 3 (mod 4). Veja que a ≡ b (mod m) se, e somente se, m | a – b (m divide a - b).

Exercícios:

1) (Olimpíada de Maio) Encontre todos os naturais a e b tais que $a|(b+1)$e $b|(a+1)$.

2) Mostre que se $7|(3a+2b)$ então $7|(4a-2b)$.

3) (Leningrado) Seja A um número natural maior que 1 e seja B um número natural que é um divisor de A^2+1. Prove que se $B-A>0$, então $B-A>\sqrt{A}$.

4) (Banco Ibero) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $(2n^2+1)|(n^3+9n-17)$.

5) (Estônia) Sejam n > 1 e k um inteiro positivo qualquer. Prove que $(n-1)^2|(n^k-1)$ se, e somente se, $(n-1)|k$.

6) (IMO) Prove que $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para todo natural n.

7) (Bielorrússia) Sejam m e n inteiros que satisfazem a igualdade

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$$

a. Prove que m+n é um quadrado perfeito.
b. Encontre todos os pares (m,n) que satisfazem a equação acima.

8) (IMO) Determine todos os pares de inteiros positivos (x,y) tais que xy^2+y+7 divide x^2y+x+y.

9) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $n+2009$ divide n^2+2009 e $n+2010$ divide n^2+2010.

10) (OBM) Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $9xy-x^2-8y^2=2005$.

11) (OBM) Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, a+1 é múltiplo de 7, a+2 é múltiplo de 9 e a+3 é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

12) (IMO) Encontre todos os inteiros positivos a, b, c com 1 < a < b < c tais que abc – 1 é múltiplo de (a-1)(b-1)(c-1).

13)(OBM) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

14)Sejam n inteiro maior que 1 e p primo. Dado que $n|(p-1)$ e $p|(n^3-1)$, prove que $4p-3$ é um quadrado perfeito.

15)(Bulgária) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $2^{2015}+2^{2012}+2^n$ é um quadrado perfeito.

16)Qual o resto de 4^{100} por 3? E por 5? E por 7?

17)Qual o resto de $36^{36}+41^{41}$ na divisão por 77?

18)Prove que $p^2 - 1$ é divisível por 24 se p é um primo maior que 3.

19)(OCM) Achar o menor natural n tal que 2001 é a soma dos quadrados de n inteiros.

20)(IMO) Seja s(n) a soma dos dígitos de n. Se N = 4444^{4444} , A = s(N) e B = s(A). Quanto vale s(B)?

21)Prove que n^5+4n é divisível por 5, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

22)Determine o resto de $2^{20}-1$ na divisão por 41.

23)Qual o resto de $1^{2000}+2^{2000}+\cdots+2000^{2000}$ na divisão por 7?

24)Qual o resto de $2^{70}+3^{70}$ na divisão por 13?

25)Qual o último dígito de 777^{777}?