Semana Olímpica
Nível 2
Profa. Kellem Corrêa
Sexta-feira 31/01/2020

Equações Funcionais

Métodos básicos para resolver equações funcionais:

- Substituir valores nos lugares das variáveis (por exemplo, 0, 1, -1) e, com isso, obter novas expressões
- Indução: a partir de $f(1)$, concluir $f(n)$ para n inteiro. Encontrar $f(1/n)$ e então concluir para todo racional. Se a função for contínua, é possível estender para os reais
- Investigar injetividade e sobrejetividade, bem como monotonicidade e continuidade da função
- Encontrar zeros ou pontos fixos ($f(x) = x$)
- Usar equação de Cauchy ($f(x + y) = f(x) + f(y)$)
- Recorrência com $f(n), f(f(n)), \ldots$
- Analisar o conjunto de valores em que f assume o valor conjecturado, a meta é provar que esse conjunto é o domínio de f
- Expressar funções como somas de funções pares e ímpares
- Conjecturar a solução no início e verificar se de fato satisfaz à equação

<u>Exercícios:</u>

1) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos x, y reais, $f(xy) = xf(x) + yf(y)$.

2) Encontre todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Cauchy.

3) Encontre todas as funções contínuas $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ que satisfazem $f(x + y) = f(x).f(y)$.

4) Encontre todas as funções contínuas $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisfazem $f(xy) = f(x) + f(y)$.

5) Encontre todas as funções contínuas $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ que satisfazem $f(xy) = f(x).f(y)$.

6) Encontre todas as funções $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que $f(1) = 2$ e $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$.

7) Encontre todas as funções $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para quaisquer reais x e y, $g(x + y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$.

8) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $x + f(x) = f(f(x))$ para todo x real. Encontre todas as soluções da equação $f\big(f(x)\big) = 0$.

9) Resolva a equação funcional $f\big(xf(x) + f(y)\big) = y + f(x)^2, x, y \in \mathbb{R}$.

10) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se para quaisquer dois reais x e y vale a igualdade $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$, prove que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer x,y reais (ou seja, f é Cauchy).

11) Existe função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x^2 - 2$ para todo número real x?

12) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) + f\big(x + f(y)\big) = 2x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

13) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f\big(x^2 + f(y)\big) = f(x)^2 + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

14) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

15) Encontre todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(xy) + x^2 + y^2 = xy + f(x^2) + f(y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

16) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

17) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

18) Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.