Grafos: Introdução - Nível 2

João Lucas Camelo Sá, Semana Olímpica 2020

1 Definições Básicas

Um **grafo** é um par $G = (V, E)$ de vértices e arestas em que cada aresta conecta dois vértices. Visualmente, pensamos em um grafo como um conjunto de pontos, alguns conectados entre si através de linhas. Como escolher quais linhas traçar dependerá do tipo de conexão que queremos representar nesse grafo. Aqui, apresentaremos algumas ferramentas conhecidas de grafos.

Dois grafos são ditos **isomorfos** se eles representam as mesmas conexões. Em outras palavras, podemos redesenhar um dos grafos mantendo suas respectivas conexões e obter o outro. Quando o número de vértices ou arestas de um grafo é pequeno, detectar isomorfismos é fácil. Porém, em geral, esse é um problema bem difícil.

O **grau** de um vértice é o número de arestas que conectam esse vértice. Vértices de grau 1 são chamados de **folhas** e sua existência pode ser bem útil em provas de indução.

Um grafo é dito **conexo**, se todos os vértices estão conectados através de arestas. Em um grafo desconexo, os subconjuntos de vértices conectados são chamados de **componentes conexas**. Um grafo é dito **completo** se todas os pares de vértices são conectados por arestas. Um subgrafo completo de k vértices é chamado de **k-clique**.

2 Graus e Arestas

Exercício 1. Mostre que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual a duas vezes o número de arestas. Conclua que o número de vértices de grau ímpar é par.

Exercício 2. Construa um grafo G de $2n$ vértices cujos graus são $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

Exercício 3. Seja G um grafo com n vértices tal que o grau de cada vértice é pelo menos $\frac{n-1}{2}$. Mostre que G é conexo. Mostre que a afirmação se torna falsa ao trocarmos $\frac{n-1}{2}$ por $\frac{n-2}{2}$.

Problema 1. Seja G um grafo com n^2 vértices tal que o grau de cada vértice é pelo menos $n + 1$. Mostre que G possui um ciclo de tamanho 4.

3 Caminhos

Dado um grafo G, um **caminho Euleriano** é uma permutação das arestas de G tal que arestas consecutivas contém um vértice em comum. Em outras palavras, um caminho Euleriano representa uma maneira de percorrer todas as arestas de um grafo exatamente uma vez de forma contínua, ou seja, sem tirar o lápis do papel.

Um **caminho Hamiltoniano** é uma permutação dos vértices de G tal que vértices vizinhos são conectados por uma aresta. Analogamente, um caminho Hamiltoniano é um caminho através das arestas de G que percorre cada vértice de G exatamente uma vez.

Problema 2. Mostre que um grafo conexo possui um caminho Euleriano se, e somente se, o número de vértices de grau ímpar é, no máximo, 2.

Um grafo orientado é um em que cada aresta possui uma orientação. Pense neles como grafos com setas para representar arestas, em vez de linhas.

Problema 3. Mostre que todo grafo orientado completo, i.e., todo par de vértices possui uma aresta de um a outro, possui um caminho Hamiltoniano.

4 Ciclos e Árvores

Um ciclo é um caminho que começa e termina no mesmo vértice, sem repetir vértices no meio.

Exercício 4. Um **grafo bipartido** é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser dividido em dois de modo que nenhuma aresta exista entre elementos de um mesmo conjunto. Mostre que um grafo é bipartido se, e somente se, ele não possui ciclos de tamanho ímpar.

Exercício 5. Uma **árvore** é qualquer grafo conexo que não contenha ciclos. Um grafo sem ciclos (com uma ou mais componentes conexas) é chamado de **floresta**. Mostre que um grafo conexo de n vértices é uma árvore se, e somente se, ele possui $n-1$ arestas. Conclua que um grafo com c componentes conexas é uma floresta se, e somente se, ele possui $n-c$ arestas.

Problema 4. (Prüfer) Os vértices de um grafo são rotulados $1, 2, \ldots, n$. Mostre que o número de maneiras de conectar esses vértices através de arestas de modo que o grafo resultante seja uma árvore é n^{n-2}.

5 Teoria de Ramsey

Exercício 6. (Ramsey) Em um grafo completo de 6 vértices, cada aresta é pintada de azul ou branco. Mostre que existe um triângulo monocromático.

O **número de Ramsey** $R(s,t)$ é o menor número de vértices de um grafo completo tal que qualquer coloração de suas arestas em azul ou branco resulta em uma clique azul de tamanho s ou uma clique branca de tamanho t. Acima, mostramos que $R(3,3) \leq 6$.

Exercício 7. Mostre que $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$. Dica: indução.

6 Teorema dos Casamentos

Problema 5. (Teorema dos Casamentos) Em uma concessionária, encontram-se n compradores e m carros. Cada comprador possui uma lista dos carros que aceitaria comprar. Mostre que é possível parear cada comprador com um carro se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: para cada subconjunto de k compradores, a união de suas listas de carros tem tamanho maior que ou igual a k.

Exercício 8. Em uma festa, cada pessoa é amiga de exatamente k outras pessoas. O grafo correspondente a esse cenário é chamado de **k-regular**. Mostre que as pessoas podem ser divididas em pares de amigas, cada pessoa pertencendo a exatamente um par.

Exercício 9. Seja $S = \{1, 2, ..., kn\}$, e suponha $A_1, ..., A_n$ e $B_1, ..., B_n$ sejam partições de S em n conjuntos de tamanho k. Então existe um subconjunto $T \subset S$ de n elementos tal que $T \cap A_i$ e $T \cap B_i$ têm tamanho 1 para todo i.

Problema 6. (Turquia 1998) n pessoas são pareadas com n casas. Cada uma das pessoas havia feito um ranking completo de todas as casas, sem empates. Após a escolha do pareamento, foi observado que, em qualquer outro pareamento entre casas e pessoas, alguém ficaria com uma casa estritamente pior à que lhe foi designada no pareamento final. Mostre que uma das pessoas recebeu sua casa favorita.

7 Problemas Diversos

Problema 7. Em um torneio de xadrez onde cada um joga exatamente uma vez com cada outro, a vitória vale 1 ponto, o empate vale 1/2 ponto e a derrota vale 0 pontos. E possíıvel que, para todo jogador P, a soma dos pontos dos jogadores que perderam para P seja maior que a soma dos pontos dos jogadores que venceram P?

Problema 8. Em uma grande festa de final de ano, cada convidado recebe dois chapéus: um vermelho e um azul. Ao começar a festa, todos os convidados põem o chapéu vermelho. Várias vezes ao longo da festa, o locutor anuncia o nome de um dos convidados e, nesse momento, o nomeado e cada um de seus amigos trocam o chapéu que estão usando pelo chapéu da outra cor. Demonstre que o locutor pode realizar escolhas convenientes de modo que ao final da festa todos estejam com o chapéu de cor azul.

Problema 9. Um grafo G possui possui n vértices e nenhum subgrafo completo de 4 vértices. Mostre que G possui, no máximo, $(\frac{n}{3})^3$ triângulos.

Problema 10. Existem 1998 cidades e 4000 estradas em um certo país (cada estrada une duas cidades). Prove que existe um caminho fechado passando através de não mais que 20 cidades.