Grafos livres de triângulos com número cromático alto

Matheus Secco

matheussecco@gmail.com

1 Introdução

Considere o seguinte problema: queremos colorir os vértices de um grafo de forma que dois vértices adjacentes possuam cores distintas (tal coloração é dita **própria**). Uma pergunta natural relacionada a este problema é a seguinte: qual o menor número de cores que precisamos para poder realizar tal coloração própria em um dado grafo? Esta pergunta nos leva à seguinte definição:

Definição 1 (**Número Cromático**). *Dado um grafo G, o número cromático de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor número de cores necessárias para se realizar uma coloração própria de G.*

Exercício 1. *O* ***grafo de Petersen*** (P) *é definido da seguinte maneira: os vértices de P são os 2-subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e há uma aresta entre dois vértices de P se os dois subconjuntos correspondentes são disjuntos. Determine $\chi(P)$.*

Encontrar o número cromático de um grafo é um problema computacional extremamente difícil e não há algoritmos eficientes conhecidos para resolver este problema. Desta maneira, uma pergunta natural é se existem cotas para o número cromático. Para introduzir estas cotas, precisaremos de algumas definições.

Definição 2. *Dado um grafo G, $\Delta(G)$ é o maior grau de G.*

Definição 3. *Dado um grafo G, $\omega(G)$ é o tamanho do maior clique de G.*

Definição 4. *Dado um grafo G, o número de independência de G, denotado por $\alpha(G)$, é o tamanho do maior conjunto independente de G.*

Exercício 2. *Prove as seguintes cotas para o número cromático de um grafo G com n vértices.*

(a) $\chi(G) \geq \omega(G)$.

(b) $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.

(c) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Observando o item (a) do exercício anterior, observamos que a presença de um clique grande em um grafo G implica que o número cromático de G é grande. Desta forma, uma pergunta natural é a seguinte: um grafo com número cromático grande deve possuir algum clique grande? Na continuação desta aula, veremos como responder negativamente a esta pergunta de diferentes maneiras.

2 Uma construção explícita - Mycielski (1955)

Seja G um grafo com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. O grafo Mycielski de G, denotado por $\mu(G)$, é definido da seguinte maneira: os vértices de $\mu(G)$ são formados por três grupos. O primeiro grupo é $v_1, \ldots, v_n$. O segundo grupo é $u_1, \ldots, u_n$ e o terceiro grupo tem um único vértice w. As arestas de $\mu(G)$ são definidas da seguinte maneira: incluímos uma aresta v_iv_j em $\mu(G)$ para cada aresta v_iv_j de G, incluímos uma aresta wu_i para todo $i = 1, \ldots, n$ e finalmente incluímos as duas arestas v_iu_j e v_ju_i para cada aresta v_iv_j de G.

Exercício 3.

(a) Prove que se G *é livre de triângulos, então* $\mu(G)$ *também é livre de triângulos.*

(b) Prove que $\chi(\mu(G)) = \chi(G) + 1$.

(c) Conclua que dado qualquer inteiro positivo k*, existe um grafo livre de triângulos com número cromático maior do que* k.

3 Uma construção não explícita - Erdős (1959)

Aqui precisaremos da noção de grafos aleatórios. Em particular, usaremos o modelo $G(n, p)$, de Erdős-Rényi. Neste modelo, um grafo com n vértices é construído de forma que cada possível aresta é incluída no grafo independentemente com probabilidade $p = p(n) \in [0, 1]$. A seguinte desigualdade será útil:

Teorema 1 (Markov)**.** *Seja* X *uma variável aleatória não negativa e seja* a *um real positivo. Então*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

No que segue, temos $G \sim G(n, p)$ e X é a variável aleatória que conta o número de triângulos em G.

Exercício 4. *Seja* $p = n^{\lambda - 1}$*, onde* $\lambda \in (0, 1/3)$ *e seja* $a = \lceil \frac{3}{p} \log n \rceil$.

(a) Prove que

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{1}{3}$$

para n *suficientemente grande.*

(b) Prove que

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) \leq \frac{1}{3}$$

para n *suficientemente grande.*

(c) Conclua que dado qualquer inteiro positivo k*, existe um grafo livre de triângulos com número cromático maior do que* k.

4 Uma construção com uma prova surpreendente - Kneser (1955) + Lovász (1978)

O grafo de Kneser $KG_{n,k}$ é o grafo cujos vértices são os k-subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ tal que dois vértices são adjacentes se os subconjuntos correspondentes são disjuntos.

Exemplo 1. *O grafo de Petersen é o grafo de Kneser* $KG_{5,2}$.

O seguinte exercício mostra que o grafo de Kneser $KG_{n,k}$ é livre de triângulos, sob certas condições envolvendo n e k.

Exercício 5. *Prove que se* $n < 3k$*, então* $KG_{n,k}$ *é livre de triângulos.*

Na sequência, veremos como calcular o número cromático do grafo de Kneser. O resultado que veremos foi conjecturado por Kneser (1955) e primeiramente provado por Lovász (1978).

Teorema 2. *Se* $n \geq 2k - 1$*, então*

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2.$$

Exercício 6. *Mostre que*

$$\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2,$$

ou seja, mostre que é possível colorir $KG_{n,k}$ *usando* $n - 2k + 2$ *cores.*

A demonstração do Teorema 2 que veremos é de Greene (2002). Para isso, necessitaremos do teorema de Borsuk-Ulam, um resultado de Topologia Algébrica, e algumas consequências deste teorema. No teorema a seguir, $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

Teorema 3 (Borsuk-Ulam)**.** *Para toda função contínua* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$*, existe* $x \in S^n$ *tal que* $f(x) = f(-x)$.

Exercício 7. *Prove os resultados a seguir, devidos a Lyusternik e Schnirelmann, utilizando o teorema de Borsuk-Ulam.*

(a) Se $S^n = F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1}$*, onde cada* F_i *é fechado, então existem* $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ *e* $x \in S^n$ *tal que* $x \in F_i$ *e* $-x \in F_i$.

Sugestão*: Considere a função contínua* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x) = (\mathrm{dist}(x, F_1), \ldots, \mathrm{dist}(x, F_n))$.

(b) Se $S^n = U_1 \cup \ldots \cup U_{n+1}$*, onde cada* U_i *é aberto, então existem* $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ *e* $x \in S^n$ *tal que* $x \in U_i$ *e* $-x \in U_i$.

Com estes resultados, é possível deduzir o seguinte lema, devido a Greene (2002).

Lema 1. *Se* $S^n = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$*, onde cada* A_i *é aberto ou fechado, então existem* $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ *e* $x \in S^n$ *tal que* $x \in A_i$ *e* $-x \in A_i$.

Agora iremos provar o Teorema 2.

Demonstração do Teorema 2:

Considere o grafo de Kneser $KG_{n,k}$ e seja $d = n - 2k + 1$. Para cada elemento $i \in \{1, \ldots, n\}$, associamos a ele um ponto $v_i \in S^d$ de forma que nenhum hiperplano passando pelo centro de S^d contenha $d+1$ dos pontos escolhidos. Suponha que $KG_{n,k}$ pode ser colorido propriamente com d cores.

A partir de uma coloração própria fixada, definiremos conjuntos $A_1, \ldots, A_d \subseteq S^d$ da seguinte maneira: para um ponto $x \in S^d$, temos $x \in A_i$ se existe um k-subconjunto T de $\{1, \ldots, n\}$ com a cor i tal que para todo $j \in T$, $\langle x, v_j \rangle > 0$ (ou seja, os pontos associados a T devem estar no hemisfério aberto centrado em x, denotado por $H(x)$).

Definamos também $A_{d+1} = S^d \setminus \bigcup_{i=1}^{d} A_i$.

Temos $A_1, \ldots, A_d$ abertos e A_{d+1} fechado. Pelo Lema 1, existem $i \in \{1, \ldots, d+1\}$ e $x \in S^d$ tais que $x, -x \in A_i$,.

Se $1 \leq i \leq d$, obtemos dois k-subconjuntos T, T' com a mesma cor i, um contido em $H(x)$ e o outro contido em $H(-x)$. Como $H(x)$ e $H(-x)$ são disjuntos, temos T e T' disjuntos, o que é um absurdo, pois teríamos uma aresta com as extremidades da mesma cor.

Se $i = d + 1$, então $H(x)$ contém no máximo $k - 1$ dos pontos v_i's, bem como $H(-x)$ também contém no máximo $k - 1$ destes pontos. Assim o equador $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$ possui pelo menos $n - 2(k-1) = d + 1$ pontos. Como o equador é um hiperplano passando pelo centro de S^d, teríamos tal hiperplano contendo $d + 1$ dos pontos escolhidos, o que contradiz nossa suposição inicial.

■

Por fim, basta notar que pelo exercício 5 e pelo Teorema 2, temos que o grafo $KG_{3k-1,k}$ é livre de triângulos e possui número cromático $3k - 1 - 2k + 2 = k + 1$, ou seja, o grafo de Kneser é uma outra maneira de construirmos grafos livres de triângulos e com número cromático alto.