Para Além dos Pontos Notáveis

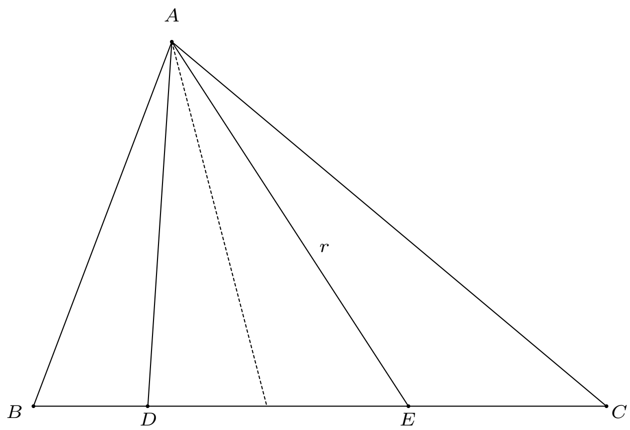
Semana Olímpica 2020 - Natal - RN

Rafael Filipe - rafaelfilipedoss@gmail.com

O objetivo deste material é apresentar diversos lemas interessantes que costumam aparecer em diversas competições. Quando estudar este material, recomendo que tente provar os lemas antes de ler as soluções e, caso consiga prová-los, ainda assim leia as soluções, pois assim você pode aprender ainda mais idéias! Bom proveito!

1 Conjugados Isogonais e Triângulo Pedal

Definição 1.1. Seja ABC um triângulo e AD uma reta qualquer que passa por A, com D sobre a reta BC. Então e reta r, reflexão da reta AD pela bissetriz do ângulo $\angle BAC$, é chamada a *isogonal* da reta AD.



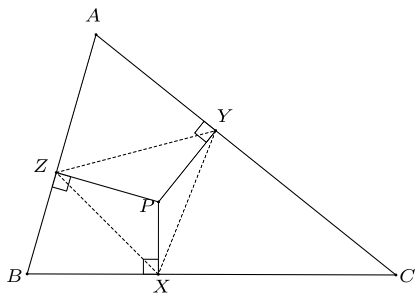
Segue direto da definição que $\angle BAD = \angle CAE$.

Lema 1.2. Seja ABC um triângulo e AD, BE e CF três cevianas que concorrem no ponto P. Então suas isogonais também concorrem em um ponto P^*, chamado *conjugado isogonal* de P.

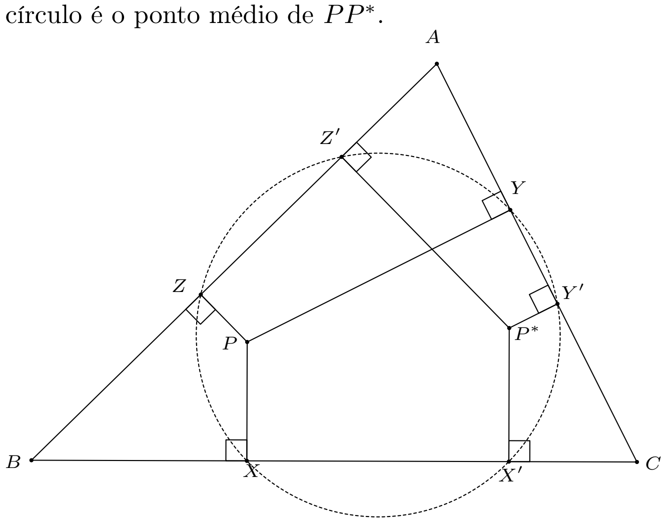
Demonstração: A melhor maneira de resolver isso é usando Trigonometria, ou mais especificamente o Ceva Trigonométrico. É imediato! Os detalhes ficam para você.

□

Definição 1.3. Seja ABC um triângulo e P um ponto em seu interior. Sejam X, Y e Z as projeções de P nos lados BC, AC e AB, respectivamente. Então XYZ é chamado o *triângulo pedal* de ABC relativo ao ponto P.



Lema 1.4. (Círculo dos 6 pontos) Sejam P e P^* dois pontos conjugados isogonais e sejam XYZ e $X'Y'Z'$ os triângulos pedais, respectivamente, com $X, X' \in BC$, $Y, Y' \in AC$ e $Z, Z' \in AB$. Então X, X', Y, Y', Z, Z' são concíclicos e o centro do círculo é o ponto médio de PP^*.

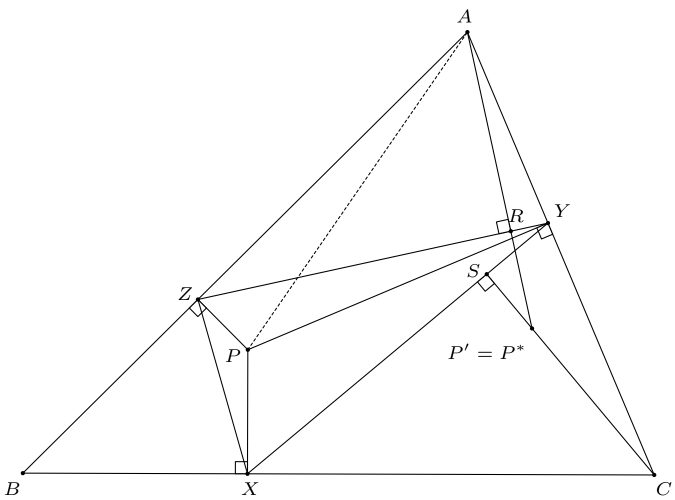


Demonstração: Por semelhança, temos que $\Delta BPX \sim \Delta BP'Z'$. Logo, $\angle BPX = \angle BP'Z'$. Mas $BZPX$ e $BZ'P'X'$ são inscritíveis. Então, segue que $\angle BPX = \angle BZX$ e $\angle BP'Z' = \angle BX'Z'$. Portanto, $\angle BZX = eBX'Z' \Rightarrow ZXX'Z'$ é inscritível. Analogamente $ZZ'YY'$ e $YY'X'X$ também são inscritíveis.

Agora, veja que a mediatriz de XX' intersecta PP^* no ponto médio, já que forma a base média do trapézio. Analogamente, ZZ' também intersecta PP^* no ponto médio. Logo, o ponto médio M de PP^* é o centro de $ZZ'X'X$. Mas analogamente, M também será o centro de $ZZ'YY'$ e $YY'X'X$. Portanto, $MY = MY' = MZ = MZ' = MX' = MX$ e então os 6 pontos são concíclicos

□

Lema 1.5. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC e seja XYZ seu triângulo pedal, com $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Então, as retas perpendiculares por A a YZ, por B a XZ e por C a XY concorrem em P^*, conjugado isogonal de P.



Demonstração: É suficiente provar que AR e AP são isogonais, assim como CP e CS. Note que $AZPY$ é inscritível com diâmetro AP. Logo, AP é a reta que passa pelo circuncentro do triângulo AZY. Veja que AR é a altura e sabemos que a altura é isogonal da reta que passa pelo circuncentro (veja o Lema 2.1). Portanto, AP e AR são isogonais e analogmanete CP e CS também serão e o resultado segue.

□

Note que os pontos do plano ficam divididos em pares de conjugados isogonais! É claro que o incentro é conjugado dele mesmo, assim como os exincentros. Mas quais outros pares são interessantes?

É claro que há uma infinidade de pontos notáveis em um triângulo e consequentemente muitos pares de conjugados isogonais, alguns deles envolvendo construções bastante complexas!

Existe até uma enciclopédia em que há um catálogo dos pontos notáveis, assim como algumas de suas propriedades: https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

Evidentemente você não precisa saber todos eles para ser bom em geometria. Muitos deles acabam sendo vistos mais como curiosidade ou como um problema para se pensar.

Problemas

1. Sejam ABC um triângulo e P um ponto do plano. Prove que as reflexões de PA, PB, PC pela bissetriz interna correspondente são paralelas se, e somente se, P está sobre o circuncírculo de ABC.

2. Sejam ABC um triângulo e P um ponto do plano. Sejam R, S, T as reflexões de P pelos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que o conjugado isogonal de P é o circuncentro de RST.

3. (Gazeta Matematica) Sejam ABC um triângulo e P um ponto interior e seja DEF seu triângulo pedal. Suponha que as retas DE e DF sejam perpendiculares. Prove que se Q é o conjugado isogonal de P com respeito ao triângulo ABC, então Q é o ortocentro do triângulo AEF.

4. Sejam P e Q dois pontos conjugados isogonais. Mostre as reflexões das retas AP e AQ com relação aos ângulos $\angle BPC$ e $\angle BQC$, respectivamente, concorrem sobre a reta BC.

5. (Teorema do Triângulo Pedal) Seja P um ponto do plano e ABC um triângulo. Se $A_1B_1C_1$ é o triângulo pedal de P com respeito a ABC. Seja R o raio do círculo circunscrito a ABC. Mostre que

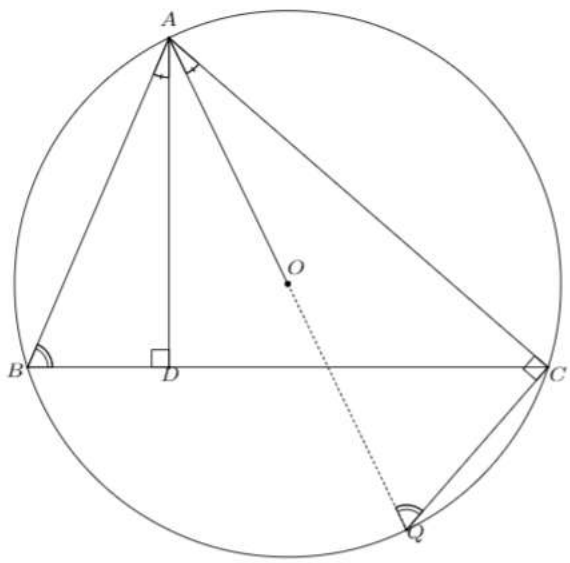
$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2}$$

Obs.: o símbolo $[XYZ]$ significa a área do triângulo XYZ.

2 Ortocentro e Circuncentro

Esses aqui você provavelmente já conhecem bem. Mas é sempre bom revisar algumas propriedades interessantes:

Lema 2.1. Em qualquer triângulo, a isogonal da altura é a reta que passa pelo circuncentro.



Demonstração: Seja ABC o triângulo, AD a altura relativa ao vértice A, com D sobre o lado BC e O seu circuncentro. Além disso, seja Q a interseção de AO com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Por ângulo inscrito, temos que $\angle ABD = \angle AQC$ e sabemos que $\angle ADB = 90°$, já que AD é altura, e $\angle ACQ = 90°$, já que AQ é diâmetro. Portanto, $\Delta ABD \sim \Delta AQC$ e então $\angle BAD = \angle OAC$, provando assim que AD e AO são isogonais.

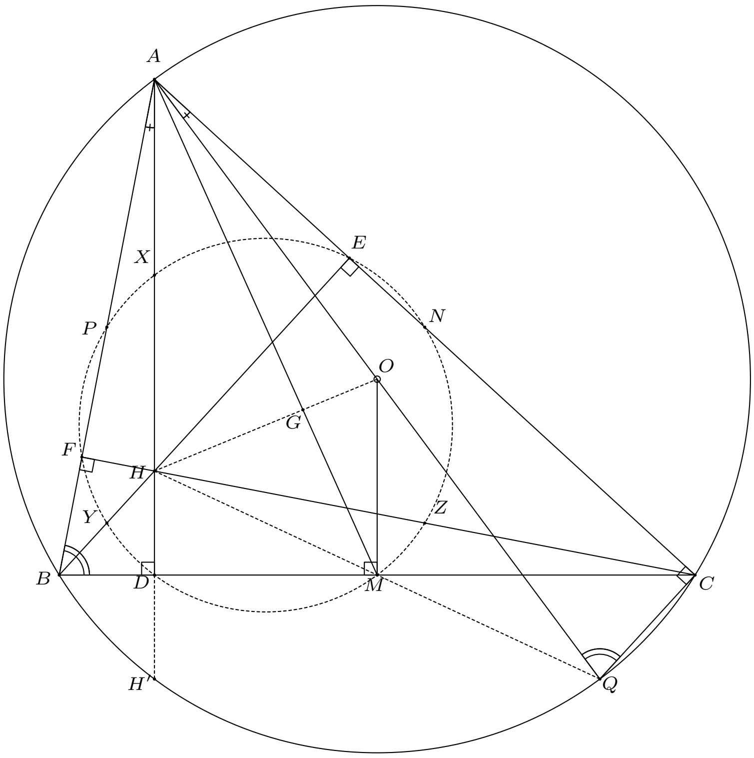
□

Corolário 2.2. O ortocentro H e o circuncentro O são pares de conjungados isogonais.

Demonstração: segue direto pelo Lema 2.1 e pelo fato de que as alturas concorrem.

□

Vamos aproveitar para citar algumas outras propriedades que envolvem esses pontos e você já deve conhecer. Seja ABC um triângulo, H o ortocentro, O o circuncentro, G o baricentro, M o ponto médio do lado BC, Γ o círculo circunscrito e Q a interseção de AO e Γ.



Lema 2.3. A reflexão de H sobre os lados do triângulo estão sobre o circuncírculo.

Demonstração: Basta ver que $\angle HBD = \angle EBC = 90 - \angle C = \angle DAC = \angle H'AC = \angle H'BC = \angle H'BD$. Portanto, BD é altura e bissetriz no triângulo BHH' e então também é mediana. Logo $DH = DH'$, como desejado.

□

Lema 2.4. A reflexão de H pelo ponto M está sobre Γ. Mais precisamente, é o ponto Q.

Demonstração: Temos que $AFHE$ é inscritível. Logo, $\angle FHE = 180° - \angle A$. Como $\angle BHC$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\angle FHE$, temos que $\angle BHC = 180° - \angle A$. Veja que, refletindo H por M até um ponto Q', temos que $HCQ'B$ será um paralelogramo. Portanto, $\angle BQ'C = \angle BHC = 180° - \angle A$. Portanto, $\angle ABC + \angle BQ'C = \angle A + (180° - \angle A) = 180°$ e então $ABQ'C$ é inscritível. Portanto, a reflexão está na circunferência Γ. Finalmente, veja que $Q'C$ é paralelo a BH. Logo, $\angle Q'CA = \angle BEA = 90°$. Portanto, AQ' é diâmetro e então $Q' \equiv Q$.

□

Corolário 2.5. Suponha que HQ intersecta Γ novamente em T. Logo, A, T, F, H, E são concíclicos.

Demonstração: Como H, M, Q são colineares e AQ é diâmetro, prolongando até T, temos que $\angle ATH = \angle ATQ = 90°$ e então T está sobre a circunferência de diâmetro AH, que é justamente a circunferência de $AFHE$. Portanto, A, T, F, H, E são concíclicos.

□

Lema 2.6. (Reta de Euler) H, G, O são colineares e além disso:

- $AH = 2OM$;
- $HG = 2GO$.

Demonstração: Na figura, note que ON é paralelo a BH, já que ambas são perpendiculares a AC, OM é paralelo a AH, já que ambas e MN é paralelo a AB, já que MN é base média relativa ao vértice C. Portanto, os triângulos MNO e ABH são semelhantes na razão $MN : AB = 1 : 2$. Em particular $AH = 2OM$.

Agora, seja G' a interseção de OH com AM. Como AH e OM são paralelos, então os triângulos AHG' e $G'OM$ são semelhantes. Como $OM : AH = 1 : 2$, a razão de semelhança é $1 : 2$ e então $G'M : AG' = 1 : 2$. Mas sabemos que o único ponto que divide a mediana AM nessa razão é o baricentro. Portanto $G' \equiv G$ e então H, G, O são colineares. Finalmente, pela semelhança, $HG = 2GO$ e temos o desejado.

□

Lema 2.7. (Círculo dos 9 Pontos) Sejam D, E, F os pés das alturas relativas aos vértices A, B, C, respectivamente, sejam também M, N, P os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente, e finalmente sejam X, Y, Z os pontos médios dos segmentos AH, BH, CH, respectivamente. Então D, E, F, M, N, P, X, Y, Z são concíclicos e o é o ponto médio de OH e o raio do círculo é metade do raio do circuncírculo de ABC.

Demonstração: Pelo corolário 2.2, H e O são conjugados isogonais. Além disso, pelo Lema 1.4 já temos que F, D, M, N, E, P são concíclicos com centro no ponto médio de OH. Seja r o raio do círculo.

Seja L o ponto médio de OH. Pelo Lema 2.5, temos que $AH = 2OM$ e sendo $2HX = 2AX = AH$, temos que $AX = HX = OM$. Portanto, $XMOA$ e $XHMO$ são paralelogramos, já que HX e OM são paralelos e têm o mesmo tamanho.

Como as diagonais XM e HO do paralelogramo $XHMO$ se encontram no ponto médio, temos que elas se intersectam em L e além disso $LX = LM = r$. Analogamente, $LY = LN = r$ e $LZ = LP = r$. Mas então X, Y, Z também estão na circunferência de centro L e raio r.

Finalmente, olhando para o triângulo AHO, XL é base média relativa a H. Logo, $LX = AO/2$. Como AO é o raio do circuncírculo de ABC, temos que o raio do círculo dos 9 pontos é metade do raio do circuncírculo de ABC.

□

Problemas

1. As alturas AD e BE do triângulo ABC se encontram no ortocentro H. Os pontos médios de AB e CH são X e Y, respectivamente. Prove que XY é perpendicular a DE.

2. Sejam ABC um triângulo e P um ponto sobre seu circuncírculo. Mostre que as reflexões de P através de cada um dos lados de ABC e o ortocentro de ABC são colineares.

3. Sejam ABC um triângulo, O seu circuncentro, H seu ortocentro, E e F os pés das alturas relativas aos vértices B e C, respectivamente e M o ponto médio do lado BC. Seja P a interseção de EF e AH e Q a interseção de AO e BC. Mostre que PQ e HM são paralelas.

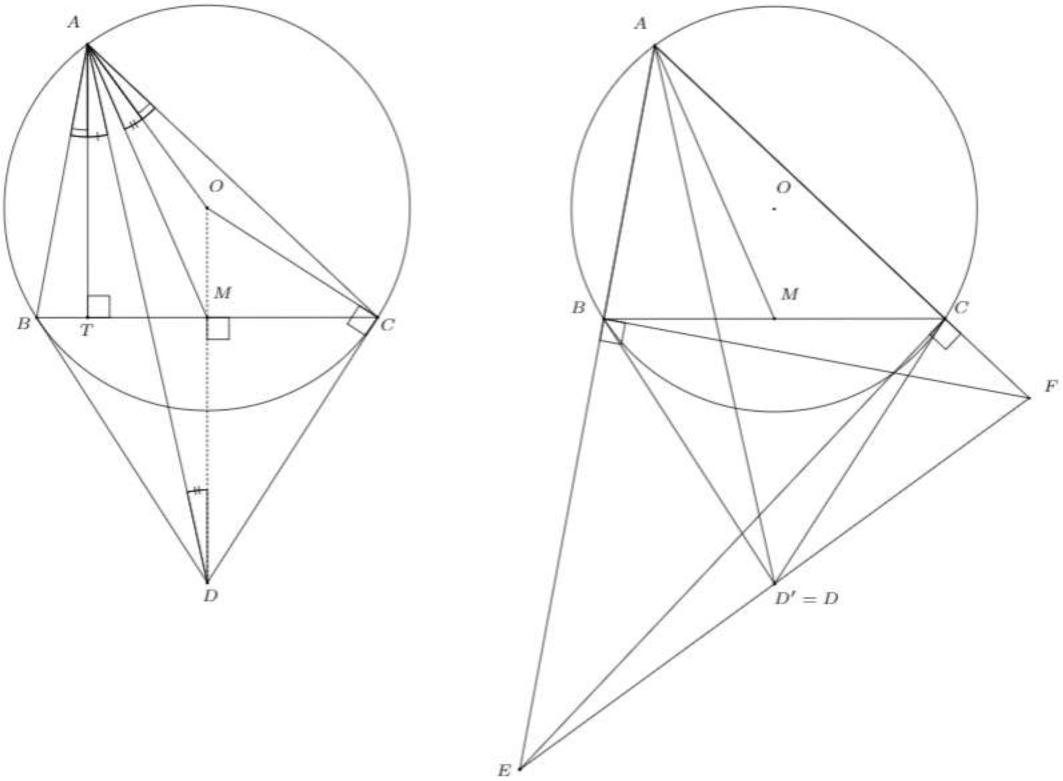
4. Seja ABC um triângulo com $AB > AC$. Sejam também O seu circuncentro, H seu ortocentro e D o pé da altura relativa ao vértice A. A perpendicular a DO por D intersecta o lado AC em P. Mostre que $\angle DHP = \angle DCP$.

5. Mostre que $HI = IO$ se, e somente se, um dos ângulos do triângulo ABC é $60°$.

3 Simediana

Vamos introduzir agora uma ceviana bastante interessante. A *simediana* é a isogonal da mediana. Ela pode ser construída com base no seguinte Lema:

Lema 3.1. (Construção da Simediana) Seja ABC um triângulo. Seja D a interseção das tangentes ao circuncírculo de ABC por B e C. Então AD é a simediana de ABC relativa ao vértice A.



Demonstração:

Solução 1: Vejamos a figura à esquerda. Queremos mostrar que $\angle BAD = \angle MAC$. Sabemos que a isogonal da altura AT é AO. Basta então mostrarmos que $\angle TAD = \angle MAO$. Como AT e DM são paralelos, segue que $\angle TAD = \angle ADM$. Então, basta mostrarmos que $\angle ADM = \angle MAO$.

Para mostrar que $\angle ADM = \angle MAO$, é suficiente mostrar que AO é tangente ao circuncírculo de AMD, ou seja, basta que se verifique a potência de ponto $AO^2 = OM.OD$. Mas sendo DC tangente ao círculo, temos que OCD é retângulo em C e pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que $OC^2 = OM.OD$. Mas sendo $OC = AO$, temos que $OA^2 = OM.OD$ e o resultado segue.

□

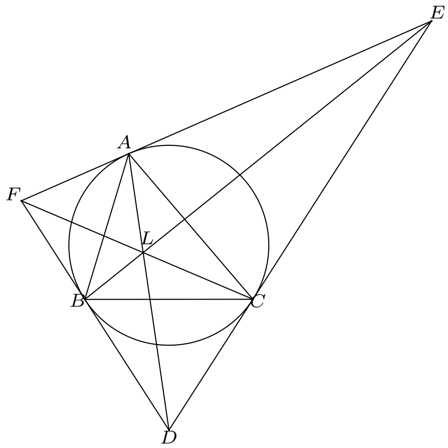
Solução 2: Vejamos a figura à direita. Suponha que a perpendicular a AB por B intersecte AC em F e a perpendicular a AC por C intersecte AB em E. É fácil verificar que $EBCF$ são concíclicos. Então $\angle ABC = \angle AFE$ e então ABC e AFE são semelhantes.

Seja D' o ponto médio de EF, pela semelhança, AD' é mediana de AEF e como AM é mediana de ABC, temos que $\angle EAD' = \angle MAC$. Vamos mostrar que $D' \equiv D$ e então teremos que AD e AM são isogonais. Veja que para mostrar o desejado, basta mostrarmos que $D'C$ e $D'B$ são tangentes ao circuncírculo de ABC.

Sendo $\angle EBF = \angle ECF = 90°$, o centro desse quadrilátero é o ponto médio de EF, ou seja, é D'. Agora, note que CD' é mediana relativa à hipotenusa em ECF. Logo, $\angle D'CF = \angle D'FC = \angle ABC$. Portanto, $\angle BCD' = 180° - \angle BCA - \angle D'CF = 180° - \angle BCA - \angle ABC = \angle BAC$. Portanto, $\angle BAC = \angle BCD'$ e então $D'C$ é tangente ao circuncírculo de ABC. Analogamente, BD' é tangente ao circuncírculo de ABC e, portanto, temos $D' \equiv D$, como queríamos.

□

Lema 3.2. As três simedianas do triângulo concorrem em um ponto, chamado ponto Simediano do triângulo.



Demonstração: Seja DEF o triângulo formado pelos encontros das tangentes aos vértices A, B e C do triângulo ABC, como mostra a figura.

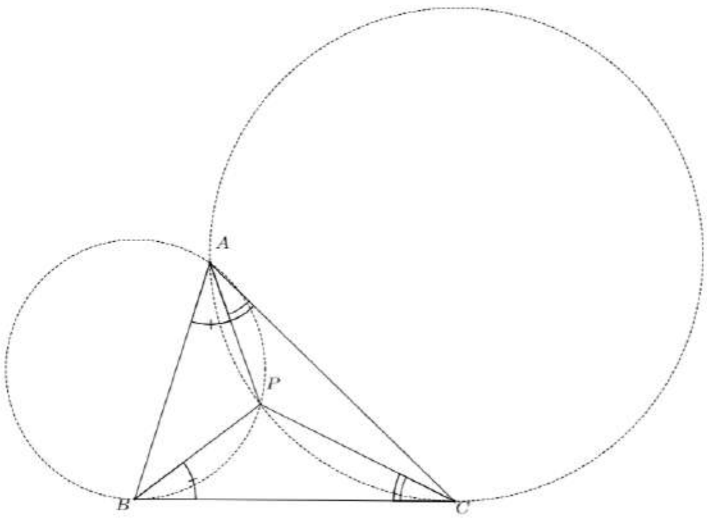
A melhor maneira de provar isso é usando o Lema de Ceva. Pelo Lema de Ceva, temos que AD, BE e CF concorrem se, e somente se,

$$\frac{FA}{EA}\frac{EC}{DC}\frac{DB}{FB} = 1.$$

Mas note que, pelo Lema do Bico, temos que $FB = FA$, $EA = EC$ e $DB = DC$ e, portanto, as frações se cancelam e temos que as retas concorrem.

□

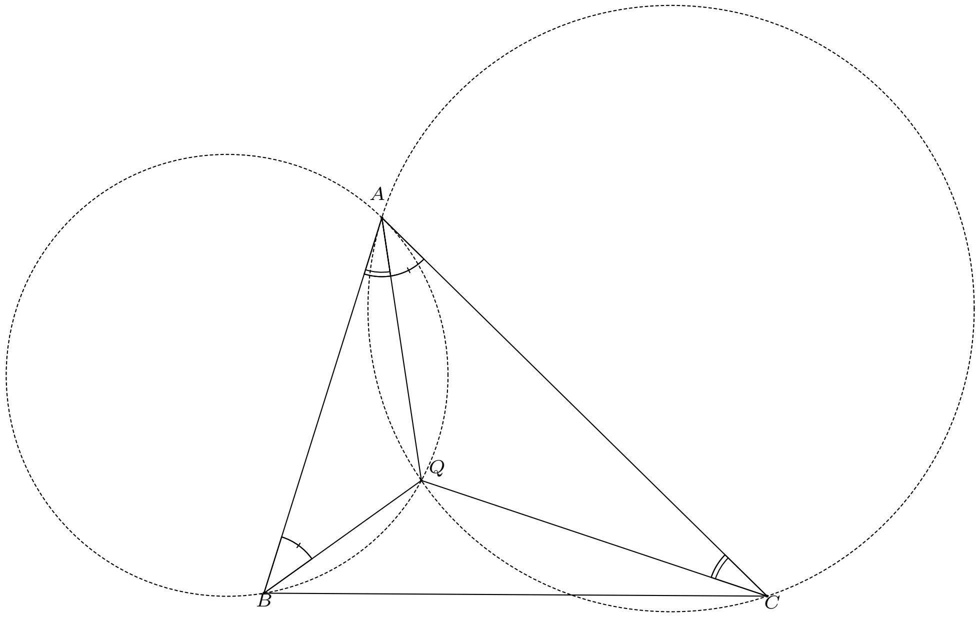
Lema 3.3. Seja ABC um triângulo e P um ponto em seu interior tal que $\angle PAC = \angle PCB$ e $\angle PAB = \angle PBC$. Então AP é a mediana relativa ao vértice A. O ponto P é conhecido como o *Humpty Point* relativo ao vértice A.



Demonstração: As igualdades de ângulos mostram que os circuncírculos de APB e APC são tangentes ao lado BC em B e C, respectivamente. Logo, BC é tangente comum. Seja X a interseção de AP com BC. Por potência de ponto, temos que $BX^2 = AX.AP = CX^2$. Portanto, $BX = CX$ e então AP é mediana.

□

Lema 3.4. Seja ABC um triângulo e Q um ponto em seu interior tal que $\angle QAC = \angle QBA$ e $\angle QAB = \angle QCA$. Então AQ é a simediana relativa ao vértice A. O ponto Q é conhecido como o *Dumpty Point* relativo ao vértice A.



Demonstração: Faremos aqui apenas o caso em que ABC é acutângulo. Os demais casos deixaremos para você. Note que $\angle BQC = 2\angle A$. Construa um triângulo isósceles BCD de base BC exteriormente ao vértice A de modo que $\angle CBD = \angle BCD = \angle A$. Note que BD e CD são as tangentes ao circuncírculo de ABC por B e C, respectivamente. Temos então que $\angle BDC = 180° - 2\angle A = 180° - \angle BQC \Rightarrow \angle BDC + \angle BQC = 180°$. Portanto, $BQCD$ é cíclico. Veja que $\angle BQD = \angle BCD = \angle A$. Veja também que $\angle BQA = 180° - \angle A$. Logo, $\angle BQA + \angle BQD = 180°$. Portanto, A, Q, D são colineares e então AQ é a simediana.

□

Problemas

1. Seja ABC um triângulo e P_A o Humpty Point relativo ao vértice A. Sendo H o ortocentro de ABC, mostre que B, C, H e P_A são concíclicos. Conclua também que $HP_A \perp AP_A$.

2. Seja ABC um triângulo e Q_A o Humpty Point relativo ao vértice A. Sendo O o circuncentro de ABC, mostre que B, C, O e Q_A são concíclicos. Conclua também que $OQ_A \perp AQ_A$.

3. Seja K a interseção da simediana relativa ao vértice A do triângulo ABC com seu circuncírculo. Prove que a reflexão de K em relação a BC está sobre a mediana relativa ao vértice A.

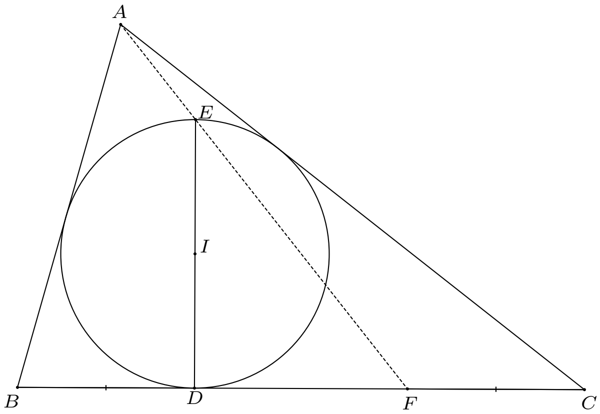
4. Seja Q_A o Dumpty Point relativo ao vértice A do triângulo ABC. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Prove que DQ_A bissecta a base média relativa ao lado BC.

5. (México 2019) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC e M o ponto médio de AH. A reta BH corta AC em D. Considere o ponto E tal que BC é a mediatriz de DE. Os segmentos CM e AE se intersectam em F. Mostre que BF é perpendicular a CM.

4 Lemas do Incentro

Nesta seção apresentamos alguns lemas importantes envolvendo o incentro que costumam aparecer em problemas.

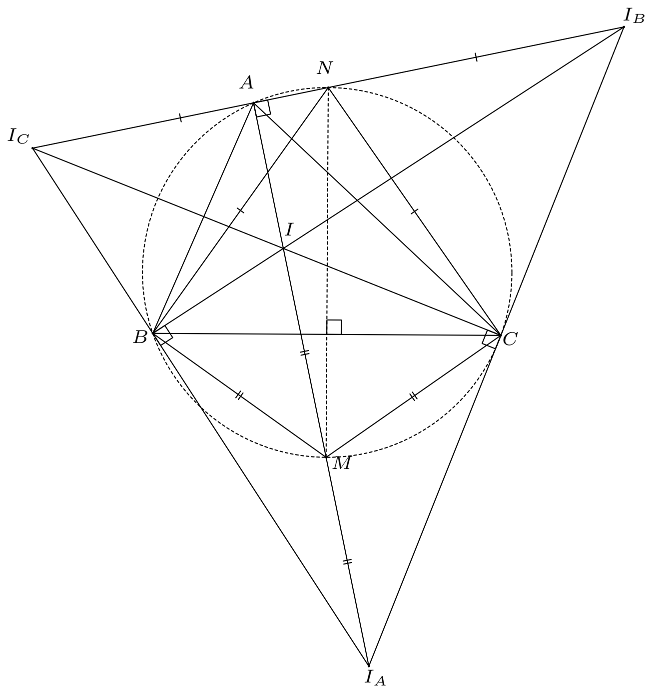
Lema 4.1. Seja D o ponto em que o incírculo do triângulo ABC toca o lado BC. Seja DE um diâmetro do incírculo. A reta AE corta BC em F. Então $BD = CF$.



Demonstração: Trace a reta tangente ao incírculo pelo ponto E. Note que essa reta é paralela ao lado BC. Dessa forma, essa reta forma um triângulo com os lados AB e AC, que é semelhante ao triângulo ABC. Note que E é o ponto de tangência do exincírculo desse triângulo. Portanto, prolangando AE, até intersectar BC em F, pela semalhança, o ponto F será o ponto de tangência do exincírculo de ABC. Finalmente, pelo Teorema do Bico, sabemos que $BD = CF = p - b$, como desejado.

□

Lema 4.2. Sejam ABC um triângulo e sejam I o incentro e I_A, I_B e I_C os exincentros relativos aos vértices A, B e C, respectivamente. Seja M o ponto médio do arco BC que não contém A e N o ponto médio do arco BC que contém A. Então, $NI_B = NI_c = NB = NC$ e $MB = MI = MC = MI_A$.



Demonstração: Temos que $\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \angle CBI = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Mas por ângulo externo também temos que $\angle BIM = \frac{\angle A + \angle B}{2}$. Logo, o triângulo BIM é isósceles e $BM = MI$. Como a bissetriz AI

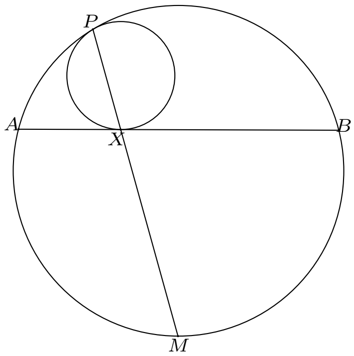
intersecta o arco BC que não contém A em seu ponto médio, temos que M é o ponto médio do arco e então $BM = MC$. Portanto, $BM = MI = MC$.

Sabemos que os exincentros são o encontro de duas bissetrizes externas e uma interna. Além disso, temos que as bissetrizes interna e externas são perpendiculares. Logo, como os ângulos opostos medem $90°$, temos que o quadrilátero $BICI_A$ é inscritível. Como $BM = MI = MC$, M tem que ser o centro desse quadrilátero e então $MB = MI = MC = MI_A$, como desejado.

Para as outras igualdades, note também que $\angle I_CBI_B = \angle I_CCI_B = 90°$. Logo, I_CBC_{IB} é inscritível. De modo análogo ao ponto M, o ponto N será o ponto médio do arco BC que contém o vértice A. Logo, $NB = NC$. Mas então N é o ponto de interseção da mediatriz de BC com o segmento I_BI_C. Então, ele tem que ser o centro da circunferência de I_CBC_{IB}, já que o centro está sobre I_CI_B, já que é diâmetro, e também está sobre a mediatriz de BC. Portanto, $NI_B = NI_C = NB = NC$.

□

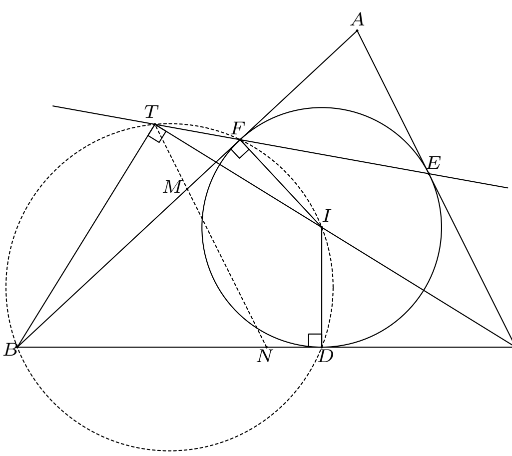
Lema 4.3. (Estrela da Morte) Considere que uma circunferência ω_1 tangencia internamente uma outra circunferência ω_2 em um ponto P. Seja AB uma corda de ω_2 que tangencia ω_1 em X. Então PX passa pelo ponto médio do arco AB que não contém X.



Demonstração: Sejam K e L as interseções de AP e BP com o círculo menor. Além disso, seja t a reta tangente comum aos dois círculos em P. Note que o ângulo $\angle PLK$ é igual ao ângulo entre t e AP devido à tangência. Da mesma forma, $\angle PBA$ também é igual ao ângulo entre t e AP. Logo, $\angle PLK = \angle PBA$. Logo, KL e AB são paralelos. Mas como AB é tangente ao círculo menor em X e paralelo à corda KL, segue que X é o ponto médio do arco KL que não contém P. Além disso, temos que PKL e PAB são semelhantes. Logo, pela semelhança, X tem que ir em M. Logo M também é ponto médio do arco AB que não contém P.

□

Lema 4.4. Seja ABC um triângulo e I seu incentro. O incírculo toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A reta CI intersecta EF no ponto T. Então T, I, D, B, F são concíclicos. Sabe-se também que $\angle BTC = 90°$ e que T está na base média relativa a B.

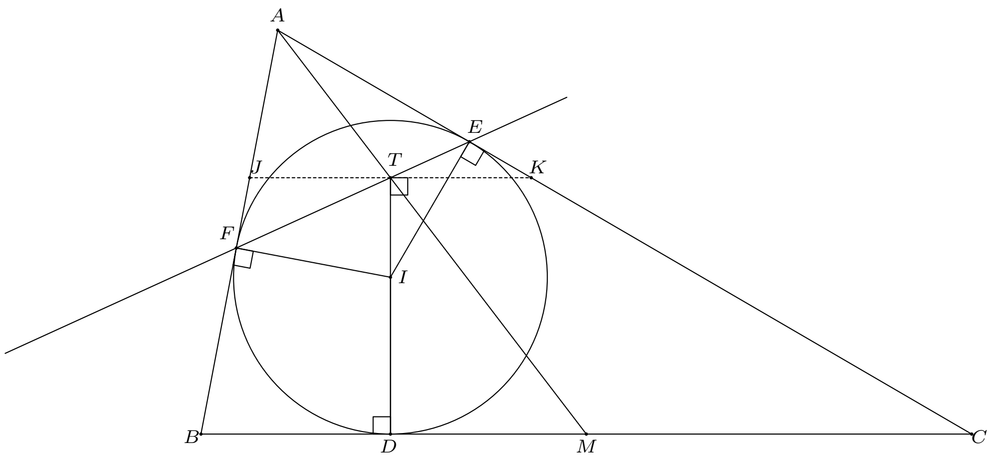


Demonstração: Sabemos que $BFID$ é inscritível, já que $\angle BFI = \angle BDI = 90°$. Agora, veja que por ângulo externo temos $\angle FTI = \angle FEA - \angle ICA = (90° - \frac{\angle A}{2}) - \frac{\angle C}{2} = \angle B2$. Mas então $\angle TFI = \angle FBI$ e, portanto, temos que $TFIB$ também é inscritível. Logo, sendo $BFID$ e $TFIB$ inscritíveis, segue que B, F, I, D, e T são concíclicos.

Resta a segunda parte. Veja que BI é diâmetro desse círculo. Então, temos $\angle BTC = 90°$, já que esse ângulo também enxerga o diâmetro. Agora, prolongando BT até intersectar AC em K, teremos que TC é altura e bissetriz do triângulo BKC. Então, BKC será isósceles e TC também será mediana. Potanto, T é ponto médio de BK e, sendo N ponto médio de BC, segue que TN é paralelo ao segmento AC e como MN também é, já que é base média, segue que as retas coincidem e, portanto, T, M e N são colineares, como desejado.

□

Lema 4.5. Seja ABC um triângulo, I seu incentro e M o ponto médio do lado BC. O incírculo toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Então as retas EF, DI e AM são concorrentes.



Demonstração: Seja T o ponto de interseção de DI com FE. Considere a paralela à reta BC por T que intersecta AB em J e AC em K. Note que $\angle BDI = \angle ITK = 90°$. Portanto, $\angle JFI = \angle JTI = 90°$ e $\angle[ITK = \angle IEK = 90°$. Portanto, os quadriláteros $JFIT$ e $ITEK$ são inscritíveis.

Dessa forma, por ângulo inscrito, temos que $\angle TKI = \angle TEI$ e $\angle TJI = \angle TFI$. Mas olhando para o triângulo EFI, temos que ele é isósceles com $IF = IE$. Portanto, segue que $\angle TEI = \angle TFI$ e então $\angle IJT = \angle IKT$. Mas então o triângulo JKI é isósceles e, sendo IT altura, ela também será mediana, de modo que $JT = TK$.

Finalmente, perceba que AJK é semelhante a ABC, já que JK e BC são paralelos. Mas então, sendo $JT = TK$, AT é mediana de AJK e pela semelhança, prolonango até BC, também será mediana de ABC, o que conclui o problema.

□

Problemas

1. (Teste Cone Sul 2014) O incírculo do triângulo ABC tangencia AB e AC em D e E, respectivamente. Um círculo passa pelos pontos B e C e tangencia a reta DE no ponto X. Prove que o ângulo $\angle BXC$ é obtuso.

2. (IMO 2006) Seja ABC um triângulo com incentro I. Seja P um ponto interior ao triângulo que satisfaz $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Prove que $AP \geq AI$, e que a igualdade acontece se, e somente se, $P = I$.

3. (IMO Shortlist 2005) A mediana AM do triângulo ABC intersecta o incírculo ω em K e L. As retas paralelas a BC por K e L intersectam *omega* novamente nos pontos X e Y, respectivamente. As retas AX e AY intersectam BC em P e Q, respectivamente. Prove que $BP = CQ$.

4. (IMO 1992) Seja C um círculo, L uma reta tangente a C e M um ponto sobre ℓ. Determine o lugar geométrico dos pontos P com a seguinte propriedade: existem pontos Q e R sobre ℓ tal que M é o ponto médio de QR e C é o círculo inscrito ao triângulo PQR.

5. (USAMO 2001) Seja ABC um triângulo e ω seu incírculo. Denote por D_1 e E_1 os pontos em que ω é tangente aos lados BC e AC, respectivamente. Denote por D_2 e E_2 os pontos nos lados BC e AC, respectivamente, tais que $CD_2 = BD_1$ e $CE_2 = AE_1$, e denote por P o ponto de interseção dos segmentos AD_2 e BE_2. O círculo ω intersecta o segmento AD_2 em dois pontos, o ponto mais perto ao vértice A é Q. Prove que $AQ = D_2P$.

Para mais problemas, utilize os artigos ou livros da referência. Eles são excelentes! Bons estudos!

5 Referências

[1] ANDREESCU, Titu; POHOATA, Cosmin; et al. Lemmas in Olympiad Geometry. XYZ Press, LLC 2016.

[2] Navneel Singhal, *Isogonal Conjugates*, 2016.

[3] Yufei Zhao, *Lemmas in Euclidian Geometry*, IMO Training 2007.

[4] Yufei Zhao, *Three Lemmas in Geometry*, Winter Camp 2010.

[5] AKOPYAN, Arseniy. Geometry in Figures. 2011.

[6] Kapil Pause, *On Two Special Points In Triangle.*