Geometria com Complexos

Rafael Miyazaki - rafaelkmiyazaki@gmail.com

31 de Janeiro de 2020

1 Fórmulas

1.1. *(Comprimento de Segmento) Dados dois pontos $A = a$, $B = b$,o comprimento do segmento*

$$\overline{AB}^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b})$$

1.2. *(Equação do Ciclo Unitário) A equação do ciclo unitério é*

$$z \cdot \bar{z} = 1.$$

1.3. *(Coeficiente Angular) Dados dois pontos $A = a$, $B = b$, o coeficiente angular da reta AB é dada por*

$$k_{AB} = \frac{a - b}{\bar{a} - \bar{b}}.$$

1.4. *(Equação da Reta) A equação da reta passando pelo ponto $A = a$ com coeficiente angular k é*

$$z - k\bar{z} = a - k\bar{a}.$$

1.5. *(Retas Paralelas) Duas retas são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular*

1.6. *(Retas Perpendiculares) Duas retas são perpendiculares se, e somente se, possuem coeficientes angulares opostos.*

1.7. *(Quadrilátero Cíclico) Sejam $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$ pontos distintos. Então $ABCD$ é um quadrilátero cíclico se, e somente se,*

$$\frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a} \in \mathbb{R}$$

1.8. *(Área de Triângulo) Dados pontos $A = a$, $B = b$, $C = c$, a área do triângulo ABC é dada por*

$$[ABC] = \pm \frac{i}{4} \begin{Vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{Vmatrix},$$

essa fórmula é particularmente útil para provar colinearidades.

1.9. *(Equação da Corda) Sejam $A = a$, $B = b$ pontos no ciclo unitário, a equação da corda AB é*

$$z + ab\bar{z} = a + b.$$

1.10. *(Equação da Tangente) Seja $A = a$ um ponto no ciclo unitário, a equação da tangente ao ciclo unitário passando por A é*

$$z + a^2\bar{z} = 2a.$$

1.11. *(Encontro de Cordas) Sejam $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$ pontos no ciclo unitário, o ponto de encontro das cordas AB e CD é*

$$z = \frac{(c+d)ab - (a+b)cd}{ab - cd}$$

1.12. *(Encontro de Tangentes) Sejam $A = a$, $B = b$ pontos no ciclo unitário, o ponto de encontro das tangentes ao ci.clo unitário passando por A e B é*

$$z = \frac{2ab}{a+b}.$$

1.13. *(Baricentro) Dados pontos $A = a$, $B = b$, $C = c$, o baricentro do triângulo ABC é o ponto*

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

1.14. *(Ortocentro) Dados pontos $A = a$, $B = b$, $C = c$, com circuncentro $O = o$, o ortocentro do triângulo ABC é o ponto*

$$h = a + b + c - 2o.$$

Em particular, quando A, B e C são pontos no ciclo unitário o ortocentro do triângulo ABC é o ponto

$$h = a + b + c.$$

1.15. *(Incentro) Dados pontos A, B, C no centro unitário, existem complexos a, b, c tais que $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$ e os pontos médios dos arcos AB, BC e CA que não contém C,A e B, respectivamente, são $-ab$,$-bc$ e $-ca$, respectivamente. Nesse caso, o incentro do triângulo ABC é o ponto*

$$i = -ab - bc - ca.$$

1.16. *(Projeção em Cordas) Sejam $A = a$, $B = b$ pontos no ciclo unitário, $C = c$ um ponto qualquer. Então a projeção de C na corda AB é o ponto*

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\bar{c})$$

2 Problemas

2.1 Problemas Introdutórios

1. *(OMCPLP/2019) Seja ABC um triângulo com $AC \neq BC$. No triângulo ABC, sejam G seu baricentro (encontro das medianas), I seu incentro (encontro das bissetrizes internas) e O seu circuncentro (centro da circunferência que passa pelos vértices). Prove que IG é paralelo a AB se, e somente se, CI é perpendicular a IO.*

2. *(Cone Sul/2009) Sejam A, B, e C três pontos tais que B é o ponto médio do segmento AC e seja P um ponto tal que $\angle PBC = 60°$. São construídos o triângulo equilátero PCQ tal que B e Q estão em semiplanos diferentes em relação a PC, e o triângulo equilátero APR tal que B e R estão no mesmo semiplano em relação a AP. Seja X o ponto de intersecção das retas BQ e PC; seja Y o ponto de intersecção das retas BR e AP. Demonstre que XY e AC são paralelos.*

3. *(IMO/2012) Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC.*

   Prove que M é o ponto médio de ST.

4. *(OBM/2015) Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $BAC = 45^o$.*

5. *(IMOSL/2009) Seja ABC um triângulo. o incírculo de ABC é tangente aos lados AB e AC nos pontos Z e Y, respectivamente. Seja G o ponto onde as retas BY e CZ se intersectam, e seja R e S os pontos tais que os quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ são paralelogramos. Prove que $GR = GS$.*

2.2 Problemas de Parametrização

6. *(APMO/2017) Seja ABC um triângulo tal que $AB < AC$. Seja D o ponto de interseção entre a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ e o circuncírculo de ABC. Seja Z o ponto de interseção entre a mediatriz de AC e a bissetriz externa do ângulo $\angle BAC$. Prove que o ponto médio do segmento AB pertence ao circuncírculo do triângulo ADZ.*

7. *(Cone Sul/2018) Em um quadrilátero convexo $ABCD$ tem-se que:*

   - *R e S são pontos no interior dos segmentos CD e AB, respectivamente, com $AD = CR$ e $BC = AS$.*

- *P e Q são pontos médios de DR e SB, respectivamente.*
- *M é o ponto médio de AC.*

Sabendo que $\angle MPC + \angle MQA - 90°$, demonstre que $ABCD$ é um quadrilátero cíclico.

8. *(IMO/2018) Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).*

9. *(IMO/2010) Dado um triângulo ABC, com incentro I e circuncírculo Γ, AI intersecta Γ novamente em D. Seja E um ponto no arco BDC, e F um ponto no segmento BC, tal que $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Se G é o ponto médio de IF, prove que o encontro das retas EI e DG está em Γ.*

10. *(IMOSL/2013) Seja ABCDEF um hexágono convexo onde $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, e $\angle A - \angle D = \angle E - \angle B = \angle C - \angle F$. Prove que as diagonais AD, BE, e CF são concorrentes.*

2.3 Problemas com Lugar Geométrico

11. *(USAJMO/2015) O quadrilátero $APBQ$ é inscrito em um círculo ω com $\angle P = \angle Q = 90°$ e $AP = AQ < BP$. Seja X um ponto variável no segmento $\overline{PQ}$. A reta AX intersecta ω novamente em $S \neq A$. O ponto T está no arco AQB de ω tal que $\overline{XT}$ é perpendicular a $\overline{AX}$. Seja M o ponto médio da corda $\overline{ST}$. Mostre que ao variar X no segmento $\overline{PQ}$, o ponto M move em um círculo.*

12. *(IMOSL/2014) Considere um círculo fixo Γ com três pontos A,B, e C fixos neste. Além disso, fixamos um número real $\lambda \in (0, 1)$. Para um ponto variável $P \notin \{A, B, C\}$ em Γ, seja M o ponto no segmento CP tal que $CM = \lambda \cdot CP$. Seja Q o segundo ponto de intersecção dos circuncírculos dos triângulos AMP e BMC. Prove que conforme P varia, o ponto Q está num círculo fixo.*

2.4 Problemas com Simetria

13. *(OBM/2017) No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.*

14. *(USAMO/2012) Seja P um ponto no plano do $\triangle ABC$, e γ uma reta passando por P. Sejam A', B', C' os pontos onde as reflexões das retas*

PA, PB, PC com respeito a γ intersecta as retas BC, AC, AB respectivamente. Prove que A', B', C' são colineares.

15. *(IMO/2011) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncŕculo Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ, e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas pela reflexão da reta ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo definido pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.*

16. *(IMOSL/2018) Seja ABC um triângulo com circuncirculo Ω e I. Uma reta ℓ intersecta as AI, BI, e CI nos pontos D, E, e F, respectivamente, distintos dos pontos A, B, C, e I. As mediatrizes x, y, e z dos segmentos AD, BE, e CF, respectivamente determinam um triângulo Θ. Mostre que o circuncírculo do triângulo Θ é tangente a Ω.*

17. *(IMOSL/2018) Sejam O o circuncentro e Ω o circuncírculo de um triângulo acutângulo ABC. Seja P um ponto arbitrário em Ω, distinto de A, B e C, e seus respectivos antípodas em Ω. Denote os circuncírculos dos triângulos AOP, BOP e COP por O_A, O_B e O_C, respectivamente. As retas ℓ_A, ℓ_B e ℓ_C perpendiculares à BC, CA e AB passam por O_A, O_B e O_C, respectivamente. Prove que o circumcírculo do triângulo formado por ℓ_A, ℓ_B e ℓ_C é tangente à reta OP.*

18. *(IMOSL/2012) Seja ABC um triângulo com circuncírculo ω e ℓ uma reta sem pontos em comum com ω. Denote por P o pé da perpendicular do centro de ω em ℓ. Os lados BC, CA e AB intersectam ℓ nos pontos X, Y, Z diferentes de P. Prove que os circuncírculos dos triângulos AXP, BYP e CZP têm um ponto comum diferente de P ou são mutualmente tangentes a P.*

19. *(IMOSL/2018) Um ponto T é escolhido dentro do triângulo ABC. Sejam A_1, B_1, e C_1 as reflexões de T através dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Seja Ω o circuncículo de $A_1B_1C_1$. As retas A_1T, B_1T e C_1T intersectam Ω novamente em A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que as retas AA_2, BB_2 e CC_2 são concorrentes em um ponto de Ω.*

2.5 Outros

20. *(IMO/2019) Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. A circunferência inscrita (incírculo) ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. A reta que passa por D perpendicular a EF intersecta ω novamente em R. A reta AR intersecta ω novamente em P. As circunferências circunscritas (circuncírculos) dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente no ponto Q.*

    Prove que as retas DI e PQ se intersectam sobre a reta que passa por A perpendicular a AI.