Semana Olímpica 2020
O Princípio da Casa dos Pombos
Nível 1

Samuel Feitosa

Caro leitor, os problemas desta lista não estão em ordem de dificuldade e alguns deles são mais adequados para alunos que estejam se preparando para competições como a OMCPLP e a Cone Sul. Ao longo da aula, tentaremos resolver uma quantidade razoável de problemas acessíveis aos alunos do Nível 1, procurando sempre aqueles com estratégias de resolução semelhantes. Esperamos que o poder e a versatilidade do Princípio da Casa dos Pombos fique evidenciada ao longo dessa discussão. Então vamos aos problemas!

1 Problemas Introdutórios

Teorema 1 Se n pombos são colocados em r casas, onde $r < n$, então pelo menos uma das casas terá mais que um pombo.

Exercício 1. Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

Exercício 2. (O problema clássico)

a) Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ existirão dois inteiros a e b tais que um dividirá o outro.

b) Mostre que se escolhermos mais que n inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ exitirá um par de inteiros primos entre si.

Exercício 3. Mostre que se escolhermos mais que $2n$ inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ existirão dois inteiros a e b tais que um dos números $ab + 1$ *ou* $4ab + 1$ é um quadrado perfeito.

Exercício 4. Uma mochila contém vários chaveiros de duas cores: azul e vermelho. Qual o número mínimo de chaveiros que precisamos retirar da mochila para garantir, sem olhar, que dentre estes chaveiros retirados existem dois da mesma cor?

Exercício 5. Um milhão de árvores cresceram em uma floresta. Sabe-se que cada árvore tem no máximo 600000 folhas. Prove que existem duas árvores na floresta com a mesma quantidade de folhas.

Exercício 6. Dados 12 inteiros, prove que existem dois deles cuja diferença é divisível por 11.

Exercício 7. A cidade de Leningrado tem 3 milhões de habitantes. Sabendo que cada pessoa possui o máximo 1 milhão de cabelos na cabeça, prove que em Leningrado existem duas pessoas com a mesma quantidade de cabelos na cabeça.

Teorema 2 Se $nk + 1$ pombos são colocados em k casas, então pelo menos uma das casas terá pelo menos $n + 1$ pombos.

Exercício 8. Existem vinte e cinco pacotes de maçãs em uma loja. As maçãs podem ser de três tipos diferentes, mas em cada pacote só existem maçãs do mesmo tipo. Prove que entre esses pacotes ecistem pelo menos 9 contendo o mesmo tipo de maça.

Exercício 9. Em Neverland, existem M times de futebol, cada um com 11 jogadores. Para disputar um campeonato importante, todos os jogadores se reuniram no aeroporto. Por problemas na companhia aérea, existem apenas 10 vôos para o seu destino, cada vôo só comportando M jogadores. Um dos jogadores, entretanto, vai viajar no seu próprio helicóptero. Prove que pelo menos um time completo disputará o campeonato.

Exercício 10. Dados 8 números naturais distintos, nenhum deles maior que 15, mostre que pelo menos três pares deles têm a mesma diferença positiva.

Exercício 11. Prove que numa festa com n pessoas, existem duas com o mesmo número de amigos.

Exercício 12. Cientistas estão reunidos para um congresso matemático. Sabe-se que dois cientistas com o mesmo número de amigos não possuem amigos em comum. Se existem cientistas que se conhecem, prove que existe um cientista que possui apenas um amigo.

Exercício 13. Alguns times de futebol participam de um torneio em que cada jogador joga contra todos os outros exatamente uma vez. Mostre que em qualquer momento durante o torneio sempre existem dois times que jogaram, até aquele momento, o mesmo número de vezes.

Exercício 14. Dez estudantes resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um estudante. Existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente um problema, existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente dois problemas, existe pelo menos um estudante que resolveu exatamente três problemas. Prove que existe pelo menos um estudante que resolveu pelo menos 5 problemas.

Exercício 15. Qual é o maior número de reis que podem ser colocados em um tabuleiro de modo a nehum rei ameaçar qualquer outro?

Exercício 16. Qual é o menor número de quadrados de um tabuleiro 8×8 que devemos pintar de verde para que todo triminó(como a figura anterior) colocado sobre o tabuleiro tenha pelo menos um quadrado verde.

Exercício 17. Prove que existem duas potências de 2 que diferem por um múltiplo de 2020.

Exercício 18. Prove que entre quaisquer 52 inteiros, podemos encontrar dois cuja diferença de seus quadrados é múltipla de 100.

Exercício 19. Prove que existe uma potência de 3 cujos três ultimos dígitos de sua representação decimal são 001.

Exercício 20. Prove que em qualquer grupo de 6 pessoas , existem três pessoas que se conhecem ou três que se desconhecem mutuamente.

Exercício 21. Prove que podemos escolher um subconjunto de um conjunto de 10 inteiros cuja soma de seus elementos é múltipla de 10.

2 PCP em Geometria

Exercício 22. Prove que um triângulo equilátero não pode ser coberto completamente por dois triângulos equiláteros menores.

Exercício 23. Ciquenta e um pontos estão no inteiror de um quadrado de lado 1. Prove que existem 3 pontos que podem ser cobertos por um quadrado de lado $0,2$.

Exercício 24. Em um tabuleiro 3×4 existem 6 pontos. Prove que entre eles existem dois pontos cuja distância entre eles não excede $\sqrt{5}$.

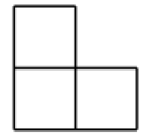
Exercício 25. Dados 25 pontos no plano tal que entre quaisquer 3 deles existem dois cuja distância é menor que 1. Prove que existe um círculo de raio 1 que contém não menos que 13 dos dados pontos.

Exercício 26. Em um círculo de raio 16 existem 650 pontos. Prove que existe um anel de raio interno 2 e raio externo 3 que contém não menos que 10 dos dados pontos.

Exercício 27. (Torneio das Cidades 1984) É dado um decágono regular com todas as suas diagonais traçadas. Em cada vértice e em cada ponto onde as diagonais se intersectam (considerando apenas pontos de interseção interiores) é colocado o número $''+1''$. Podemos em qualquer momento mudar os sinais de todos os números escritos em uma diagonal ou em um lado. É possível após um certo número de tais operações termos trocado todos os sinais para $-1''$?

3 Miscelânia

Exercício 28. Qual o menor número de quadrados de um tabuleiro 8×8 que devem ser pintados de verde, de modo que, em qualquer posição em que coloquemos a figura abaixo no tabuleiro, pelo menos um quadrado da peça não será verde?



Exercício 29. (OBMEP 2017) Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de sete bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

Exercício 30. (Bielorússia) Os alunos da OBM aprendem n matérias na semana olímpica. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:

a) Se $n = 8$ existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

b) Se $n = 7$, não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

Exercício 31. Em um parlamento de Rolanda existem 65 deputados. Eles formam comitês de modo que:

a) Nenhum deputado está em todos os comitês

b) Cada dois deputados estão juntos em exatamente 1 comitê

Demonstre que existe um deputado que integra pelo menos 9 comitês.

Exercício 32. (Leningrado) Dados 70 números naturais não excedendo 200, prove que existem dois deles cuja diferença é igual a $4, 5$ ou 9.

Exercício 33. (Rússia) Em um torneio de xadrez participaram 8 pessoas, que obtiveram pontuações distintas. O jogador que ocupou o segundo lugar, tem tantos pontos quanto os quatro últimos juntos. Qual foi o resultado da partida entre os jogadores que ocuparam as colocações de terceiro e sétimo?

Exercício 34. Prove que para qualquer a com $mdc(a, 10) = 1$ e para qualquer n natural, existe uma potência de a temrinando em $\underbrace{000\ldots1}_{n}$

Exercício 35. Prove que se escolhermos 55 inteiros do conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ existirão dois que diferem por 9. Faça o mesmo com o número 10.

Exercício 36. (Teste de Seleção do Peru para a Cone Sul) Tuvalu possui 10 cidades, chamadas $H_1, H_2, \ldots, H_{10}$, e algumas delas são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que é possível chegar de H_1 a H_{10}. Mostre que uma das situações abaixo ocorre:

(i) Existe um caminho ligando H_1 a H_{10} utilizando no máximo 3 estradas.

(ii) Existem duas cidades H_i e H_j, $2 \leq i < j \leq 9$, tais que todo caminho ligando H_1 a H_{10} passa por H_i ou H_j.

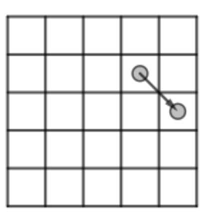
Exercício 37. (Olimpíada Russa) Duzentos estudantes participaram de uma competição matemática. A prova possuía 6 problemas. Sabemos que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Prove que existem dois participantes de modo que para qualquer problema, pelo menos um deles dois conseguiu uma solução correta.

Exercício 38. (Rússia) Todo quadrado de um tabuleiro 100×100 é pintado com uma dentre 4 cores de modo que 25 existam exatamente 25 quadradinhos de cada cor em toda linha e coluna. Prove que podemos escolher duas colunas e duas linhas de modo que elas se intersectam em quatro quadradinhos de cores diferentes.

Exercício 39. (USAMO 2000) Qual é o número máximo de quadrados de um tabuleiro 1000×1000 podem ser escolhidos de modo que não existam dois deles numa mesma linha ou coluna?

Exercício 40. Uma senha de banco consiste de um número de 3 dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Devido a um defeito no caixa eletrônico, a conta pode ser operada se acertarmos apenas dois dos 3 dígitos. Então a conta pode ser operada certamente após 64 tentativas. Qual o número mínimo de tentativas necessárias para podermos operar a conta?

Exercício 41. Em um tabuleiro 5×5, cada quadradinho possui uma peça em seu centro. O único movimento permitido para uma dessas peças e se deslocar para um quadradinho que compartilhe exatamente um vértice com o quadradinho em que ela está, como indicado na figura abaixo. Tanto é possível que várias peças ocupem um mesmo quadradinho quanto que um quadradinho fique vazio. Em um dado momento, todas as peças serão movidas simultaneamente. Qual o número mínimo de quadradinhos vazios poderão ser encontrados após esse momento?



Exercício 42. Em uma escola, devem ser formados n clubes, com $n \geq 3$ e cada uma com 3 integrantes, de modo que para cada par de clubes haja exatamente um deputado que integra ambas.

a) Dê um exemplo de uma distribuição de 7 clubes que satisfaçam as condições mencionadas.

b) Verifique que se um estudante pertence a 4 clubes, então ele deve pertencer a todos os clubes.

c) Determine o valor mínimo de n que de modo que qualquer conjunto de clubes que satisfaçam essas condições obriguem a presença de um mesmo estudante em todos eles.

Exercício 43. Um fotógrafo deve tirar fotos de uma festa com 10 membros de uma mesma família. Cada um dos 45 possíveis pares de pessoas dessa família devem aparecer juntos em exatamente uma foto. Além disso, existem apenas dois tipo de fotos: as que possuem 2 ou 3 pessoas.

a) Verifique que cada pessoa da família deverá aparecer em pelo menos uma foto de apenas 2 pessoas.

b) Verifique que o fotógrafo deverá tirar pelo menos 19 fotos.

c) Dê um exemplo de distribuição de pessoas em 19 fotos satisfazendo as condições dadas.

Exercício 44. João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, ele sabe que em um grupo de 13 pessoas sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

b) No horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

Exercício 45. Dois grupos, cada um formado por 7 membros, irão disputar um torneio de xadrez em que um participante de cada grupo joga apenas contra participantes do outro grupo.

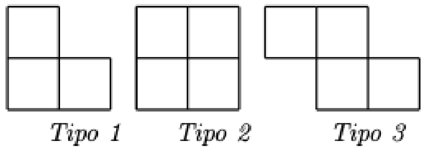
a) Prove que após a realização de 22 jogos nesse torneio é possível encontrarmos 4 participantes que podem ser sentados em uma mesa de modo que cada par de vinzinhos já tenha disputado uma partida no torneiro.

b) Exiba um exemplo de 21 jogos entre eles em que isso não ocorre.

Exercício 46. (OBM 2016) Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, de azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Todas as linhas e colunas devem conter casas das três cores.

a) Pelo menos quantas casas serão pintadas de vermelho?

b) Quantas casas serão pintadas de marrom?



Exercício 47. (Leningrado) Um tabuleiro 7×7 foi coberto sem sobreposição pelas figuras abaixo
Mostre que foi usado extamente uma com 4 quadrados.

Exercício 48. No planeta X, existem 100 países alienígenas com conflitos entre si. Para evitar uma guerra mundial, esses países se organizam em grupos de alianças militares para proteção mútua. Sabemos que as alianças seguem as seguintes regras:

1) Nenhuma aliança contém mais de 50 países.

2) Quaisquer dois países pertencem a pelo menos uma aliança.

a) É possível que um país participe de menos de três alianças militares?

b) Qual é o menor número possível de alianças para que essas duas condições sejam satisfeitas?

Exercício 49. Alguns alunos de uma escola foram divididos em equipes satisfazendo as seguintes condições:

i) Quaisquer 2 equipes diferentes possuem exatamente 2 membros em comum.

ii) Toda equipe possui exatamente 4 elementos.

iii) Para quaisquer 2 alunos, existe uma equipe da qual ambos não fazem parte.

a) Explique por que um par qualquer de estudantes pode participar de no máximo 3 equipes.

b) Qual o número máximo de equipes?

Exercício 50. Alguns números reais estão escritos nas casas de um tabuleiro $n \times n$ de modo que a soma total dos números escritos é positiva. Mostre que existe alguma permutação das colunas do tabuleiro, de modo que a soma dos números escritos nas casas da diagonal principal do novo tabuleiro seja positiva.

Exercício 51. Uma ilha possui 50 clubes. Cada habitante da ilha é sócio de 1 ou 2 clubes. Cada clube tem no máximo 55 sócios e para cada par de clubes existe um habitante da ilha que é sócio dos dois clubes. Encontre todas as possibilidades para as quantidades possíveis de habitantes da ilha. Justifique sua resposta.

Exercício 52. (Torneio das Cidades) Em um tabuleiro 5×5, João deve desenhar segmentos de reta ligando vértices opostos dos quadrados 1×1 de modo que quaisquer dois segmentos desenhados não possuam pontos em comum (incluindo seus vértices). Qual o número máximo de tais segmentos que podem ser desenhados por João?

Exercício 53. a) Verifique que se escolhermos 3 ou mais inteiros do conjunto $\{6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k+6\}$, pelo menos dois irão diferir por 1, 4 ou 5.

b) Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2022 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 4 ou 5?

Respostas e Soluções.

1. Somemos a maior quantidade de bolas que podem ser retiradas de cada tipo sem que obtenhamos 12 bolas de cada cor:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+\underbrace{11+11+\ldots+11}_{2005 \text{ vezes}}.$$

Essa soma é igual a 22121. Assim, é possível que tenhamos azar e retiremos tal quantidade de bolas sem obtermos 12 bolas de cada cor. Entretanto, se retirarmos 22122 bolas, certamente teremos 12 bolas de uma mesma cor, pois a soma anterior conta exatamente o máximo de bolas que podem ser retiradas sem que isto ocorra. Logo, o mínimo buscado é 22122.

2.

a) Todo natural m pode ser escrito na forma $m = 2^a b$ onde b é impar(2^a é a maior potência de 2 que divide m e b é parte ímpar de m). Existem n números ímpares no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, logo, existem no máximo n partes impares distintas para os números do conjunto anterior. Como iremos escolher $n+1$ números, pelo princípio da casa dos pombos, iremos escolher dois com a mesma parte ímpar. Assim um dividirá o outro.

b) Podemos dividir os números do nosso conjunto em n pares : $(1,2), (3,4), \ldots, (2n-1, 2n)$. Como devemos escolher $n+1$ números, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos em um par deveremos escolher seus dois elementos. Como esses números são consecutivos, eles serão primos entre si.

11. Cada pessoa da festa possui uma quantidade de amigos que é um elemento do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Entretanto, não é possível que simultaneamente uma pessoa tenha 0 e outra $n-1$ amigos. Portanto, existem apenas $n-1$ valores possíveis para as quantidades de amigos das n pessoas. Daí, pelo Princípio da Casa dos Pombos, duas delas devem possuir a mesma quanntidade de amigos.

12. Sejam P o cientista com a maior quantidade de amigos, digamos $P_1, P_2, \ldots,\ P_k$, e d_i a quantidade de amigos de P_i, $1 \le i \le k$. Portanto, $d_1, d_2, \ldots, d_k \le k$. Suponha que não exista $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ para o qual $d_i = 1$, assim

$$d_1, d_2, \ldots, d_k \ge 2$$

e daí

$$\{d_1, \ldots, d_k\} \subseteq \{2, 3, \ldots, k\}.$$

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tais que $d_i = d_j$. Isso diz que P_i e P_j têm a mesma quantidade de amigos, o que contraria as condições do problema, uma vez que ambos conhecem P.

36. Se H_1 ou H_{10} estão ligadas a no máximo duas cidades, a condição $ii)$ é claramente satisfeita, pois todo caminho ligando H_1 a H_{10} deve passar por elas. Suponha então que H_1 está ligada a A_1, A_2 e A_3 e que H_{10} está ligada a B_1, B_2 e B_3 (eventualmente podem existir mais cidades ligadas a H_1 e H_{10}). Se $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} \neq \emptyset$, então existe um caminho ligando H_1 a H_{10} usando no máximo 2 estradas. Se isso não acontece e existe alguma estrada conectando uma cidade do conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ a uma cidade de $\{B_1, B_2, B_3\}$, então teremos um caminho entre H_1 e H_{10} utilizando 3 estradas e $i)$ é verificado. Finalmente, resta analisarmos a situação em que $\{H_1, A_1, A_2, A_3\} \cap \{H_{10}, B_1, B_2, B_3\} = \emptyset$ e que não existe uma estrada entre A_i e B_j, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Nesse caso, como existem apenas 10 cidades e o grafo é conexo, qualquer caminho que una H_1 a H_{10} deve passar por uma das duas cidades que não está no conjunto $\{H_1, H_{10}, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$. Ou seja, $ii)$ é verificada. Em qualquer um dos casos analisados anteriormente, $i)$ ou $ii)$ é verificado.

37. Façamos um tabuleiro 200×6 representando o resultado dos estudantes. Cada linha representará um estudante e cada problema resolvido pelo estudante i será marcado com o número 1 na tabela. Caso o problema não tenha sido resolvido, marcaremos o número zero. Pensemos inicialmente em casos extremais. O que acontece se um estudante resolveu os seis problemas? Basta escolhermos um estudante qualquer e a dupla desejada estará formada. Se um estudante resolveu 5 problemas, também podemos obter facilmente nossa dupla. E se um estudante tiver resolvido exatamente 4 problemas? Suponha, sem perda de generalidade, que ele não resolveu os problemas 5 e 6. Sabemos que pelo menos 120 pessoas resolveram o problema 5. Se nenhuma delas tiver resolvido o problema 6, saberemos que no máximo 80 pessoas o resolveram. Mas isso contradiz o enunciado e assim temos certeza que pelo menos uma pessoa resolveu ambos os problemas. Resta mostrar que esse tipo de situação sempre acontece, i.e., existe alguém que resolveu pelo menos 4 problemas. Agora usaremos a contagem dupla. A soma dos número das colunas é pelo menos $6 \times 120 = 720$. Como existem 200 linhas, pelo menos uma delas terá soma $\frac{720}{200} > 3$, ou seja, pelo menos uma linha terá 4 números 1's.

44.

a) O mínimo é 25. Se em um grupo de 24 pessoas cada signo aparecer no máximo duas vezes, teremos no máximo $2 \cdot 12 = 24$ pessoas. Como $24 < 25$, isso mostra que pelo menos um dos signos deverá aparecer três vezes. De fato, esse é o mínimo onde tal propriedade ocorre pois se considerarmos 24 pessoas divididas em 12 pares com o mesmo signo, a propriedade do enunciado não será encontrada.

b) O número mínimo é $12 \cdot 12 + 1 = 145$. Veja que existem no máximo $12 \cdot 12 = 144$ pares de combinações possíveis entre signos Gregos e Chineses. Se escolhermos 145 pessoas e as dividirmos de acordo com esses pares, pelo menos um deles deverá ser usado duas vezes. Não é possível concluirmos isso com menos de 145, pois é possível 144 pessoas apresentarem todos os pares possíveis de combinações sem repetições.

48.

a) Não é possível. Suponha que o país A pertence a no máximo duas alianças. Nesse caso, como cada aliança tem no máximo 50 países, o país A é membro de uma mesma aliança com no máximo $49 + 49 = 98$ países. Como existem 99 países distintos de A, pelo menos um deles não estará em uma aliança com A e isso gera um conflito com a regra (2).

b) Como cada país participa de pelo menos 3 alianças, se somarmos as quantidades de participações de todos os países em todas as alianças obteremos pelo menos o número $3 \cdot 100 = 300$. Por outro lado, cada aliança contabiliza no máximo 50 participações. Assim, o número mínimo de alianças não pode ser menor do que $\dfrac{300}{50} = 6$. Para verificarmos que esse número é realmente o menor possível, basta exibirmos um exemplo de configuração em que ele é atingido. Divida os 100 países em 4 grupos de 25 países: A, B, C, D. Agora forme as alianças de 50 países constituídas por todas as 6 combinações de dois desses grupos:

$$A \cup B, A \cup C, A \cup D, B \cup C, B \cup D \text{ e } C \cup D.$$

49.

a) Suponha que existem estudantes A e B participando de 4 equipes chamadas de E_1, E_2, E_3 e E_4:

$$E_1 = \{A, B, C, D\}$$

$$E_2 = \{A, B, E, F\}$$

$$E_3 = \{A, B, G, H\}$$

$$E_4 = \{A, B, I, J\}.$$

Pela condição (iii), existe uma equipe E_5 que não possui simultaneamente os estudantes A e B. Pela condição (i), a equipe E_5 deve possuir exatamente dois membros em comum com E_1, E_2 , E_3 e E_4. Se E_5 não possuir A e nem B, então deverá possuir os elementos dos seguintes 4 conjuntos disjuntos $\{C, D\}$, $\{E, F\}$, $\{G, H\}$ e $\{I, J\}$. Isso obriga E_5 a ter mais de 4 elementos. Digamos que E_5 não possua o estudante A, mas possua o estudante B (como A e B desempenham o mesmo papel nessa análise, o estudo que faremos para A é o mesmo para B). Assim, E_5 deverá possuir pelo menos um estudante de cada um dos mesmos 4 conjuntos anteriores e novamente essa equipe será forçada a ter mais que 4 elementos. Esse absurdo mostra que um par qualquer de estudantes não pode participar de 4 equipes.

b) Considere um par de estudantes (A, B) que participa de mais de uma equipe, cuja existência é garantida pelo item (i), e estudemos as seguintes possibilidades a partir das informações do item anterior.

1) O par (A, B) participa de exatamente três outras equipes que são chamadas de E_1, E_2, E_3:

$$E_1 = \{A, B, C, D\}$$

$$E_2 = \{A, B, E, F\}$$

$$E_3 = \{A, B, G, H\}$$

Iremos mostrar que nesse caso não podem existir mais que 4 outras equipes. Repetindo o argumento do item anterior, se uma equipe não possuir A e nem B, ela possuirá todos os elementos do conjunto $\{C, D, E, F, G, H\}$ e isso produzirá um absurdo com a condição (ii). Logo, todas as demais equipes possuem A ou B e, pela condição (i), qualquer outra equipe possui exatamente um elemento de cada um dos três conjuntos: $\{C, D\}$, $\{E, F\}$ e $\{G, H\}$. Analisando as possíveis combinações dos 3 elementos restantes, em princípio, teríamos no máximo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ escolhas associadas aos conjuntos anteriores. Entretanto, existem alguns pares de escolhas que não podem estar simultaneamente presentes para que a condição (i) seja satisfeita:

$$\{C, E, G\} \quad \text{e} \quad \{D, F, H\}$$

$$\{C, E, H\} \quad \text{e} \quad \{D, F, G\}$$

$$\{C, F, G\} \quad \text{e} \quad \{D, E, H\}$$

$$\{C, F, H\} \quad \text{e} \quad \{D, E, G\}.$$

Assim, podem existir no máximo mais 4 equipes além de E_1, E_2 e E_3.

2) O par (A, B) participa de exatamente duas outras equipes que são chamadas de E_1, E_2:

$$E_1 = \{A, B, C, D\}$$

$$E_2 = \{A, B, E, F\}.$$

Em virtude da condição (i), a única equipe que não pode possuir simultaneamente A e B é a $\{C, D, E, F\}$. Considerando uma equipe distinta dela, novamente pelo item (i), um elemento de cada um dos conjuntos $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ e $\{E, F\}$ deve estar presente. Isso novamente gera $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ escolhas que podem ser divididas nos seguintes pares:

$$\{A, C, E\} \quad \text{e} \quad \{B, D, F\}$$

$$\{A, C, F\} \quad \text{e} \quad \{B, D, E\}$$

$$\{A, D, E\} \quad \text{e} \quad \{B, C, F\}$$

$$\{A, D, F\} \quad \text{e} \quad \{B, C, E\}.$$

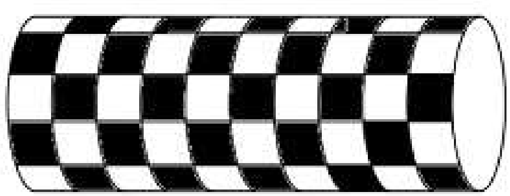
De cada par, apenas uma escolha pode estar presente nas equipes de estudantes e isso nos mostra que existem no máximo mais 4 equipes que contém A ou B. Considerando as duas equipes que contém $\{A, B\}$, a eventual equipe $\{C, D, E, F\}$ e as possíveis 4 outras equipes, temos um total de no máximo $2 + 1 + 4 = 7$ equipes.

Em ambos os casos, o máximo de equipes é 7. Para mostrar que é possível satisfazermos as três condições com esse número, basta considerar o seguinte exemplo:

$$\{A, B, C, H\}, \{A, D, F, H\}, \{A, E, G, H\}, \{B, D, G, H\},$$
$$\{B, E, F, H\}, \{C, D, E, H\}, \{C, F, G, H\},$$

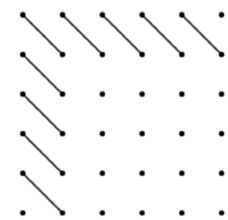
em que cada letra, como anteriormente, representa um certo estudante.

50. Crie um cilindro a partir do tabuleiro como indicado na figura abaixo. Esse cilindro pode ser decomposto em n diagonais disjuntas que começam em um extremo do cilindro e terminam no outro. Como a soma de todos os números do tabuleiro é positiva, pelo menos uma das diagonais terá soma positiva. Ela correponde a uma permutação das colunas do tabuleiro que satisfaz as condições do problema.

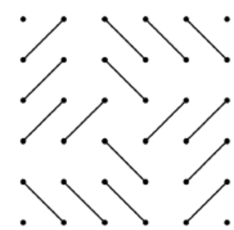


51. Existem $\binom{50}{2} = 1225$ pares de clubes e para cada um deles devemos ter um habitante que pertence a ambos. Denotemos esses habitantes por H_{ij} com $i, j \in \{1, 2, \dots, 50\}$ e $i < j$. Se dois deles são iguais, um habitante estaria em três clubes e isso seria uma contradição. Portanto, todos os estudantes H_{ij} são distintos e isso nos mostra que a ilha precisa ter pelo menos 1225 pessoas e que cada clube tem pelo menos um habitante do tipo H_{ij}. Fixado um clube qualquer, ele possui 49 habitantes distintos em comum com os outros 49 clubes. Como ele pode ter no máximo 55 habitantes, conterá no máximo 6 que não são da forma H_{ij}. Assim, o número máximo de habitantes da ilha é $1225 + 50 \cdot 6 = 1525$. Considere agora um inteiro $n \in [1225, 1525]$ e 1225 pessoas distintas. A cada uma associe uma etiqueta H_{ij}, com $i, j \in \{1, 2, \dots, 50\}$ e $i < j$, e coloque a pessoa com etiqueta de índice i no clube C_i. Essas serão as únicas pessoas em dois clubes. Como $n - 1225 \leq 300$, podemos distribuir as pessoas restantes inserindo-as em grupos de até 6 pessoas nas $55 - 49 = 6$ posições vazias de cada um desses 50 clubes criados. Elas serão as únicas pessoas que participarão de apenas um clube. Podemos concluir que o conjunto de valores possíveis é o intervalo de inteiros $[1225, 1525]$.

52. Os 25 quadradinhos determinam $6 \times 6 = 36$ vértices. Como cada segmento deve usar dois deles, podemos concluir inicialmente que João não pode desenhar mais que $\frac{36}{2} = 18$ segmentos. Analisando um lado qualquer do quadrado maior, não é possível que os 6 vértices sejam usados. Assim, eliminando-se um vértice do lado superior e um vértice do lado inferior, teremos apenas 34 vértices utilizáveis e consequentemente não mais que $\frac{34}{2} = 17$ segmentos. Essa ainda não é a melhor estimativa. Para que apenas dois vértices dos lados mencionados anteriormente não sejam usados, deve ocorrer a configuração exibida na próxima figura:



Note que não é possível desenhar segmentos usando os vértices do lado inferior sem deixar de usar pelo menos mais um vértice de tal lado. Logo, não poderemos usar pelo menos 3 vértices. Como o número de vértices usados deve ser um número par, no máximo utilizaremos 32 deles e assim teremos não mais que $\frac{32}{2} = 16$ segmentos desenhados. O exemplo abaixo mostra que tal número é realizável.



53.

a) Suponha, por absurdo, que escolhemos 3 ou mais inteiros e nenhum deles difere por 1, 4 ou 5. Como nenhuma diferença é 1, podemos admitir que todos diferem por pelo menos 2, e como nenhuma diferença é 5, não podemos escolher simultaneamente $6k + 1$ e $6k + 6$. Se $6k + 1$ não é escolhido, devemos escolher $6k + 2, 6k + 4, 6k + 6$ e nesse caso, temos dois que diferem por 4. Por outro lado, se $6k + 1$ é escolhido, devemos escolher $6k + 1, 6k + 3, 6k + 5$ e assim também temos dois números que diferem por 4. Essa contradição mostra que não é possível escolher 3 ou mais inteiros sem que haja as diferenças de 1, 4 e 5 entre dois deles.

b) Divida os 2022 inteiros em $\frac{2022}{6} = 337$ conjuntos disjutos de 6 números consecutivos. Pelo item anterior, se escolhermos mais que 2 elementos de um desses conjuntos, poderemos encontrar as diferenças 1, 4 ou 5 entre eles. Portanto, o máximo de elementos que podem ser escolhidos é $337 \cdot 2 = 674$. Para verificar que esse número é realizável, basta escolher todos os múltiplos de 3 da lista, que totalizam $\frac{2022}{3} = 674$. Como a diferença entre quaisquer dois múltiplos de 3 é um múliplo de 3, segue que nenhuma dessas diferenças pode ser 1, 4 ou 5.