Semana Olímpica 2020
Jogos.
Nível 2

Samuel Feitosa

Exercício 1. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número que seja uma potência de 2 menor ou igual ao número atual. O jogador que obtiver o número 0 vence. Quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 2. O jogo começa com o número 1000. Na sua vez, cada jogador pode subtrair do número atual qualquer número do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. O jogador que obtiver o número 0 vence. Se existem dois jogadores, quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 3. Dois jogadores colocam alternadamente moedas sobre uma mesa redonda, sem sobrepor as moedas. O jogador que não puder colocar uma moeda perde. Quem tem a estratégia vencedora?

Exercício 4. Existem duas pilhas com 7 pedras cada. Na sua vez, um jogador pode retirar quantas pedras ele quiser, mas somente de uma das pilhas. O perdedor é o jogador que não puder jogar.

Exercício 5. O número 2 está escrito em o quadro negro no início de um jogo. Dois jogadores, alternadamente, podem trocar o número atual N do quadro pelo número $N + d$ onde d é um divisor positivo de N menor que N. O jogador que escrever um número maior que 19891989 perde o jogo. Qual dos dois jogadores pode sempre garantir a vitória?

Exercício 6. (Cone Sul) Estão escritos em um quadro negro os 100 números: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100$. A cada segundo, eliminamos dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e incluímos, no conjunto, o número $a + b + ab$ obtendo assim um conjunto con um elemento menos. Depois de 99 destas operações, ficaremos apenas com um número. Quais os possíveis que ele pode tomar?

Exercício 7. (OCM) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
– Marcondes: estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior;
Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação. – Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
– Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
– Francisco: agora eu sei o número que o Fernando recebeu;
– Fernando: agora eu tamb em sei o número que Francisco recebeu;
Quais os números recebidos por cada um deles?

Exercício 8. Começamos com uma pilha contendo n palitos. Dois jogadores A e B jogam alternadamente removendo palitos da pilha. Em seu primeiro movimento, A remove qualquer número s de modo que $0 < s < n$. Daí em diante, um jogador pode remover qualquer número inteiro positivo de palitos da pilha que seja um divisor do número retirado no movimento precedente. O vencedor é aquele que fizer o último movimento. Se $n = 1000$, quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 9. (Cone Sul 2000) Paulo escolheu um inteiro positivo n e escreveu em uma folha os $2n + 1$ números:

$$n/1, n/2, n/3, \ldots, n/(2n + 1).$$

Laura escolhe dois números escritos por Paulo e os troca por $2ab - a - b + 1$. Depois de repetir este procedimento $2n$ vezes, obtemos penas um número. Determinar seus possíveis valores.

Exercício 10. (O jogo de Wythoff) Dois jogadores jogam alternadamente removendo pedras de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode remover qualquer quantidade de pedras de uma pilha ou igual número de pedras de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar a última pedra. Se no início as pilhas possuem 5 e 7 pedras, qual dos jogadores sempre pode ganhar? Determine todas posições perdedoras.

Exercício 11. (Jogo do NIM) Existem três montes com $3, 5$ e 7 pedras. Na sua vez, cada jogador pode remover quantas pedras quiser de um dos montes. Perde o jogador que remover a última pedra. Quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 12. (Olimpíada Austríaca - Polonesa 1999) Considere o seguinte jogo solitário. Sobre o plano, um conjunto finito de pontos de coordenadas inteiras e segmentos é chamado de uma *posição* neste jogo se as seguintes condições são satisfeitas:

i) As extremidades de cada segmento são pontos de coordenadas inteiras.

ii) Cada segmento selecionado é paralelo a um eixo coordenado ou à reta $y = x$ ou à reta $y = -x$.

iii) Cada segmento selecionado possui exatamente 5 pontos de coordenadas inteiras e todos eles estão selecionados.

iv) Quaisquer dois segmentos selecionados têm no máximo um ponto em comum.

Um movimento do jogo consiste em selecionar um novo ponto de coordenada inteira e um novo segmento de modo que o novo conjunto de pontos e segmentos selecionados seja uma *posição*. É verdade que existe uma posição inicial tal que o jogo admite infinitos movimentos?

Exercício 13. Umberto e Doisberto jogam em um tabuleiro $3 \times n$ colocando dominós sempre cobrindo duas casas adjacentes (com lado em comum) do tabuleiro. Umberto faz a primeira jogada, Doisberto faz a segunda e eles seguem jogando alternadamente. Perde o jogador que não conseguir jogar. Para cada um dos casos abaixo, diga quais dos jogadores pode bolar uma estratégia e sempre garantir a vitória independentemente de como o outro jogue.

a) $n = 3$

b) $n = 4$

Exercício 14. (OBM 2007) Arrumam-se 2007^2 quadradinhos iguais, formando um tabuleiro 2007×2007. Arnaldo e Bernaldo disputamo seguinte jogo: cada jogada de Arnaldo consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Bernaldo consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Os jogadores jogam alternadamente, sendo Arnaldo o primeiro a jogar. Quando Arnaldo não puder fazer sua jogada, Bernaldo fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. É possível que Bernaldo ganhe o jogo, não importando como Arnaldo jogue?

Exercício 15. (OBM 2005) Você tem que determinar o polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros positivos fazendo perguntas da forma "Qual é o valor numérico de $p(k)$?", sendo k um inteiro positivo à sua escolha. Qual é o menor número de perguntas suficiente para garantir que se descubra o polinômio?

Exercício 16. Começamos com uma pilha contendo n palitos. Dois jogadores A e B jogam alternadamente removendo palitos da pilha. Em seu primeiro movimento, A remove qualquer número s de modo que $0 < s < n$. Daí em diante, um jogador pode remover qualquer número inteiro positivo de palitos da pilha que seja um divisor do número retirado no movimento precedente. O vencedor é aquele que fizer o último movimento. Se $n = 1000$, quem sempre pode garantir a vitória?

Exercício 17. (Rússia 1998) Eu escolho um número de 1 a 144, inclusive. Você pode escolher um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 144\}$ e perguntar se meu número está no subconjunto. Uma resposta *sim* irá custar 2 reais e uma resposta *não* irá custar apenas 1 real. Qual é a menor quantia em reais que você precisará gastar para descobrir o meu número?

Exercício 18. (Baltic Way) Sabemos que um n é um inteiro positivo e que $n \leq 144$. Você pode fazer até 10 questões do tipo: " O número n é menor que a?" As respostas são dadas com um certo atraso. A resposta para a i-ésima pergunta é dada apenas após a realização da $i+1$-ésima pergunta, para $i = 1, 2, \ldots, 9$. A resposta da décima pergunta é dada imediatamente após a sua formulação. Encontre uma estratégia para identificar n.

Exercício 19. (Rússia 2000) Tânia escolheu um número natural $X \leq 100$ e Sasha está tentando adivinhar esse número. Ele pode escolher dois números naturais M e N, menores que 100, e perguntar: "Qual o valor do $mdc(X + M, N)$? Mostre que Sasha pode determinar o número de Tânia com no máximo 7 perguntas.

Exercício 20. (Banco IMO 1991) Dois estudantes A e B estão jogando o seguinte jogo: Cada um deles escreve em uma folha de papel um inteiro positivo e a entrega para um juiz. O juiz escreve sobre um quadro negro dois inteiros, um dos quais é a soma dos números escolhidos pelos jogadores. Em seguida, o juiz pergunta ao estudante A: Você sabe o inteiro escrito pelo outro estudante? Se a resposta é *não*, então o juiz faz a mesma pergunta ao estudante B. Se a resposta de B é *não*, o juiz faz a mesma pergunta novamente a A e assim sucessivamente. Assuma que ambos os estudantes são inteligentes e confiáveis. Prove que após um número finito de questões um dos estudantes irá responder *sim*.

Exercício 21. (Olimpíada de São Petesburgo) Dois jogadoores A e B removem pedras alternadamente de duas pilhas, uma com 100 e outra com 252 pedras. Na sua vez, cada jogador pode retirar uma quantidade de pedras de uma pilha que é um divisor do número de pedras da outra pilha. O jogador que fizer o último movimento vence. Determine quem sempre pode garantir vitória.

Exercício 22. (Bulgária 1995) Dois jogadoores A e B removem pedras alternadamente de uma pilha com $n \geq 2$ pedras. O jogador A começa removendo pelo menos 1 e não mais que $n - 1$ pedras. Na sua vez, cada jogador retira pelo menos uma pedra e não mais o que o outro jogador retirou na jogada anterior. O jogador que não puder jogar perde. Determine as posições perdedoras.

Exercício 23. (OBM 2014) Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leq k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leq m \leq 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra. Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.