O Problema 3 da OBM 2019 N3 (Provei um lado... E agora?)

Prof. Victor Bitarães
bitaraesv@gmail.com

1 Comentários Iniciais

Eis o problema que inspira esta aula:

> Seja $\mathbb{R}_{>0}$ o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que
> $$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$
> para todos os reais positivos x e y.

O fato de domínio e contradomínio serem $\mathbb{R}_{>0}$ impede muitas das substituições tradicionais (como $x = 0$, $y = -x$, etc). Além disso, o termo em f do lado direito é pouco amigável. Embora ninguém tenha resolvido completamente o problema durante a prova, muitos alunos conseguiram avanços. O objetivo desta resolução é enumerar alguns truques que podem funcionar em outras equações sobre $\mathbb{R}_{>0}$. E os exercícios, assim espero, reforçarão essas idéias.

2 Resolução e Idéias Principais

Como de costume, denote-se por $P(x, y)$ a proposição $f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$

É claro que provaremos que $f(x) = x$, para todo x. Ter uma "função alvo" pode ajudar, desde que não se suponha a princípio que ela seja a única solução.

Certamente muitos tentaram, e às vezes é útil $\boxed{\textbf{(i) isolar o termo simétrico em } x \textbf{ e } y\textbf{:}}$

$$P(x, y): \quad f(f(x)f(y)) = f(xy + f(x)) - x$$

Permutando x e y, o termo simétrico não se altera:

$$P(y, x): \quad f(f(y)f(x)) = f(yx + f(y)) - y$$

Comparando as equações, obtemos:

$$\underline{f(xy + f(x)) - x = f(xy + f(y)) - y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \text{(I)}$$

Com isso, prova-se que f é injetora! Se $f(x) = f(y)$, (I) nos dá $x - y = f(xy + f(x)) - f(xy + f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$. Injetividade geralmente é útil, mas ainda não me foi mostrada nenhuma solução que a aproveite.

Muitos truques comuns falhando, a esperança reside no que o $\mathbb{R}_{>0}$ tem de melhor: números maiores que zero! Já que o monstrengo $f(f(x)f(y))$ é positivo, podemos $\boxed{\textbf{(ii) trabalhar com inequação:}}$

$$\underline{f(xy + f(x)) > x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \text{(II)}$$

A expressão $u = xy + f(x)$, para x fixo e y variável, representa "qualquer coisa maior do que $f(x)$". Com efeito, dado $u > f(x)$, tome $y = \dfrac{u - f(x)}{x}$, que é positivo. A inequação (II) se traduz assim: se

$u > f(x)$, então $f(u) > x$. Faça agora $u = x$, e veja a mágica acontecer: se $x > f(x)$, então $f(x) > x$, uma contradição! Logo:

$$\underline{f(x) \geq x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \text{(III)}$$

Provei um lado... E agora? Não é porque uma idéia já funcionou que ela não pode funcionar de novo. Use (III) para "acalmar" o monstrengo: como $f(f(x)f(y)) \geq f(x)f(y)$, a equação inicial nos dá:

$$\underline{f(xy + f(x)) \geq f(x)f(y) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}} \quad \text{(IV)}$$

Hora da minha jogada favorita: **(iii) forçar igualdade entre termos dentro dos f's!**

Em (IV), force $xy_0 + f(x) = y_0$. Isso acontece para $y_0 = \dfrac{f(x)}{1-x}$, que precisa ser positivo. Convém supor $x < 1$. Nesse caso:

$$f(y_0) \geq f(x)f(y_0) + x > f(x)f(y_0) \Rightarrow f(x) < 1$$

Acabamos de provar que:

$$\underline{x < 1 \Rightarrow f(x) < 1} \quad \text{(V)}$$

Já é um começo! Temos em (III) uma cota de f "por baixo", e em (V), "por cima". Para aplicar esta, precisamos de algo menor do que 1. Que tal forçar agora $xy + f(x) < 1$ em (V)? Isso acontece para $y < \dfrac{1-f(x)}{x}$ (tal y existe se, e somente se, $x < 1$), e acarreta:

$$1 > f(xy + f(x)) \geq f(x)f(y) + x \geq f(x)y + x$$

$$\Rightarrow y < \frac{1-x}{f(x)}$$

.

Provamos que, para $x < 1$, todo y real positivo menor do que $\dfrac{1-f(x)}{x}$ é também menor do que $\dfrac{1-x}{f(x)}$. Ou seja, não existe $y > 0$ tal que $\dfrac{1-x}{f(x)} \leq y < \dfrac{1-f(x)}{x}$. Isso significa que $\dfrac{1-f(x)}{x} \leq \dfrac{1-x}{f(x)}$, donde $(f(x)-x)(f(x)+x-1) \geq 0$. Já sabemos que $f(x) - x \geq 0$. Portanto:

$$\underline{x < 1 \Rightarrow f(x) = x \quad \text{ou} \quad f(x) \geq 1 - x} \quad \text{(VI)}$$

O que (VI) nos diz de mais interessante é que, para x próximo de zero, se $f(x)$ desviar da função alvo, ele vai parar muito longe, próximo de 1. Isso tem cheiro de contradição!

Com efeito, suponha $y < 1$ tal que $f(y) \neq y$. Suponha ainda, novamente, que $xy + f(x) < 1$. Temos

$$1 > f(xy + f(x)) \geq f(x)f(y) + x \geq x(1-y) + x \Rightarrow y > 2 - \frac{1}{x}$$

Tome, por exemplo, $x = \dfrac{2}{3}$; o que acabamos de provar foi que $y < \dfrac{1-f(2/3)}{2/3}$ e $f(y) \neq y$ implicam $y > \dfrac{1}{2}$. Isso é absurdo para y suficientemente próximo de zero, isto é, menor que $\min\left(\dfrac{1-f(2/3)}{2/3}, \dfrac{1}{2}\right)$. Portanto:

$$\underline{\exists \quad M > 0 \quad | \quad f(y) = y, \quad \forall \quad y \leq M} \quad \text{(VII)}$$

O pouco que falta para completar a solução a partir de (VII) fica como exercício para o leitor.

3 Exercícios

1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, valha

$$f(xf(y) + f(x)) = yf(x) + x$$

2. É dada uma função $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$. Prove que existem $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$f(x + y) < yf(x) + f(f(x))$$

3. Encontrar todas as funções f dos reais positivos nos reais positivos que cumprem

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y), \quad \forall x, y > 0$$

4. Determinar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1), \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$$

5. Achar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ que cumpram, para todos os $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, a igualdade

$$f(1 + xf(y)) = yf(x + y)$$

6. Encontrar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$xf(xf(2y)) = y + xyf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$$

7. Encontrar todas as funções sobrejetoras f dos reais positivos nos reais positivos tais que

$$2xf(f(x)) = (f(f(x)) + x)f(x)$$

   para todo x real positivo.

8. Determinar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que se tenha, para todos os $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y)$$

9. Determinar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tais que se tenha, para todos os $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(xf(y) + yf(x)) = xy$$

10. Encontrar todas as funções $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

   para todos os pares de reais positivos x e y.