Alguns problemas de teoria dos números

Carlos Gustavo Moreira
IMPA

1) (OBM-1991). Prove que existem infinitos números da forma $1999\ldots991$ que são múltiplos de 1991.

2) (P3-IMO-1988). Prove que se a e b são inteiros positivos e $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um inteiro então $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.

3) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que 2^n tem mais de 2000 dígitos e tem pelo menos 1000 zeros consecutivos dentre seus 2000 últimos dígitos.

4) Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os 2017 últimos dígitos de 2^n pertencem a $\{1, 2\}$.

5) (P5-IMO-1989). Prove que, para todo inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é potência de primo.

6) (P5-IMO-1990). Determine todos os inteiros positivos n tais que $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ é inteiro.

7) (P6-IMO-1991). Uma sequência infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de números reais é dita $l$imitada se existe uma constante C tal que $|x_i| \leq C, \forall i \geq 0$.

Dado um número real $\alpha > 1$, construa uma sequência infinita limitada $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tal que $|x_i - x_j||i-j|^\alpha \geq 1$ para todo par de naturais distintos i, j.

8) (P6-IMO-1994). Prove que existe um conjunto A de inteiros positivos com a seguinte propriedade: para cada conjunto infinito S de primos, existem dois inteiros positivos $m \in A$ e $n \notin A$, cada um dos quais sendo produto de k elementos distintos de S para algum $k \geq 2$.

9) (P3-IMO-1998). Para cada inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n). Determine todos os inteiros positivos k tais que $d(n^2)/d(n) = k$ para algum inteiro positivo n.

10) (P5-IMO-2000). É possível encontrar N divisível por exatamente 2000 primos distintos tal que N divide $2^N + 1$? [N pode ser divisível por potências de primos.]

11) Prove que existem infinitos primos da forma $4k+1$.

12) (BANCO-IMO-2000). Determine todas as triplas (a, m, n) de inteiros positivos tais que $a^m + 1 \mid (a+1)^n$.

13) (P5-OBM-1997) Sejam $c \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + c$. Definimos

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é pré-periódico se $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ é finito.

Mostre que $\{x \in \mathbb{Q} | \, x \text{ é pré-periódico}\}$ é finito.

14) Dizemos que um inteiro positivo m é uma potência se $m = a^b$, com $a, b \geq 2$.

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um conjunto A formado por n inteiros positivos tal que, para todo $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, a soma dos elementos de B é uma potência.

15) (P6-IMO-2003). Prove que, para todo primo p, existe um primo q tal que $n^p - p$ não é divisível por q, para todo inteiro positivo n.

16) (P4-IMO-2005). Consideremos a sequência infinita $a_1, a_2, ...$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \forall n \geq 1.$$

Determine todos os inteiros positivos que são coprimos com todos os termos da sequência.

17) (P5-IMO-2007). Prove que se a e b são inteiros positivos tais que
$4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$ então $a = b$.

18) (P3-IMO-2008). Prove que existe um número infinito de inteiros positivos n tais que n^2+1 tem um divisor primo maior que $2n + \sqrt{2n}$.

19) (P3-OBM-2012). Qual é o menor natural n para o qual existe k natural de modo que os 2012 últimos dígitos na representação decimal de n^k são iguais a 1?

20) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n. Prove que $b = a^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

21) Seja p um primo ímpar. Prove que $\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}$.

22) (P6-Ibero-2016). Sejam $k \geq 1$ um inteiro e $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dígitos. Prove que existem dígitos $b_1, b_2, \ldots, b_k$ e um inteiro $n \geq 0$ tais que os últimos $2k$ dígitos de 2^n são, nessa ordem, $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$.

23) (P6-IMO-2017). Um par ordenado (x, y) de inteiros é um *ponto primitivo* se o máximo divisor comum entre x e y é 1. Dado um conjunto finito S de pontos primitivos, demonstre que existem um inteiro positivo n e inteiros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para cada (x, y) de S, se verifica:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

24) Prove que existe um número real $\alpha > 1$ tal que, para todo inteiro positivo n, $\{\alpha^n\} = \alpha^n - \lfloor \alpha^n \rfloor \in (1/3, 2/3)$ e, além disso, $\lfloor \alpha^n \rfloor$ é par se, e somente se, n é primo.