The 12^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-feira, 28 de Fevereiro de 2020, Bucareste

Language: Português

Problema 1. Seja ABC um triângulo retângulo em C. Seja I o incentro do triângulo ABC e seja D o pé da perpendicular de C sobre AB. O incírculo ω do triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Sejam E e F as reflexões de C nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente. Sejam K e L as reflexões de D nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente.

Prove que os circuncírculos dos triângulos A_1EI, B_1FI e C_1KL possuem um ponto em comum.

Problema 2. Seja $N \geq 2$ um inteiro. Sejam $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N)$ sequências de inteiros não negativos. Para cada inteiro $i \notin \{1, \ldots, N\}$, sejam $a_i = a_k$ e $b_i = b_k$, onde $k \in \{1, \ldots, N\}$ é um inteiro tal que $i - k$ é divisível por N. Dizemos que $\mathbf{a}$ é $\mathbf{b}$-*harmônica* se cada a_i é igual à seguinte média aritmética:

$$a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

Suponha que nem $\mathbf{a}$ e nem $\mathbf{b}$ é uma sequência constante, e que tanto $\mathbf{a}$ é $\mathbf{b}$-harmônica quanto $\mathbf{b}$ é $\mathbf{a}$-harmônica.

Prove que pelo menos $N+1$ dos números $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ são iguais a zero.

Problema 3. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Em um país existem n aeroportos e n companhias aéreas operando voos em ambos os sentidos. Para cada companhia, existe um inteiro ímpar $m \geq 3$ e m aeroportos distintos $c_1, \ldots, c_m$, em que os voos oferecidos pela companhia são exatamente aqueles entre os seguintes pares de aeroportos: c_1 e c_2; c_2 e c_3; $\ldots$; c_{m-1} e c_m; c_m e c_1.

Prove que existe um ciclo fechado consistindo de um número ímpar de voos em que não existem dois deles operados pela mesma companhia aérea.

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Tempo permitido $4\frac{1}{2}$ horas.

The 12$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 29 de Fevereiro de 2020, Bucareste

Language: Português

Problema 4. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os inteiros positivos. Um subconjunto A de $\mathbb{N}$ é *livre de somas* se, quando x e y são membros (não necessariamente distintos) de A, sua soma $x + y$ não pertence a A.

Determine todas as funções sobrejetivas $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para cada subconjunto livre de somas A de $\mathbb{N}$, a imagem $\{f(a) : a \in A\}$ é também livre de somas.

Nota: uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é sobrejetiva *se, para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo m tal que $f(m) = n$.*

Problema 5. Um *ponto lático* no plano Cartesiano é um ponto cujas coordenadas são ambas inteiras. Um *polígono lático* é um polígono em que todos os vértices são pontos láticos. Seja Γ um polígono lático convexo. Prove que Γ está contido em um polígono lático convexo Ω tal que os vértices de Γ estão todos sobre a borda de Ω e exatamente um vértice de Ω não é um vértice de Γ.

Problema 6. Para cada inteiro $n \geq 2$, seja $F(n)$ o maior fator primo de n. Um *par estranho* é um par de primos distintos p e q tal que não existe um inteiro $n \geq 2$ para o qual $F(n)F(n+1) = pq$.

Prove que existem infinitos pares estranhos.

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Tempo permitido $4\frac{1}{2}$ horas.