Primeiro dia

22 de outubro de 2020

Problema 1. Seja $\alpha > 1$ e considere a função $f(x) = x^\alpha$ para $x \geq 0$. Para $t > 0$, defina $M(t)$ como a maior área possível de um triângulo com vértices $(0,0)$, $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ para $s \in (0,t)$. Seja $A(t)$ a área da região delimitada pelo segmento com extremidades $(0,0)$ e $(t, f(t))$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

(a) Demonstre que $A(t)/M(t)$ não depende de t. Denotamos esse valor por $c(\alpha)$. Determine $c(\alpha)$.

(b) Determine o conjunto de valores que $c(\alpha)$ pode tomar quando α varia no intervalo $(1, +\infty)$.

Problema 2. Determine todas as triplas de inteiros positivos (a,b,c) que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a^3 + b^3 + 1 = (c-1)^3. \end{cases}$$

Problema 3. Sejam m, r, s, t inteiros positivos tais que $m \geq s+1$ e $r \geq t$. Considere m conjuntos $A_1, A_2, ..., A_m$, com r elementos cada um. Suponha que, para todo $1 \leq i \leq m$, existem pelo menos t elementos de A_i que pertencem, cada um deles, a pelo menos s conjuntos A_j com $j \neq i$. Determine o maior número possível de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

23 de outubro de 2020

Problema 4. Para todo polinômio $P(x)$ com coeficientes reais, definem-se

$$P_0 = P(0) \quad \text{e} \quad P_j(x) = x^j \cdot P^{(j)}(x),$$

onde $P^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de P para $j \geq 1$.

(a) Demonstre que existe uma única sequência de números reais $b_0, b_1, b_2, \ldots$ tal que para todo polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e todo x real, vale que

$$P(x) = b_0 P_0 + \sum_{k \geq 1} b_k P_k(x) = b_0 P_0 + b_1 P_1(x) + b_2 P_2(x) + \cdots .$$

(b) Calcule o valor da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Problema 5. Determine todos os números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ tais que

$$x_{i+1} = \frac{x_i^3 + 2}{3x_i^2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, 2020$ e, além disso, $x_{2021} = x_1$.

Problema 6. Para um conjunto A, define-se $A + A = \{a + b : a, b \in A\}$. Determine se existe um conjunto A de inteiros positivos tal que

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{|(A + A) \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.