XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Lima - Perú, 2020

Segunda feira, 16 de novembro de 2020

Primeiro dia

Problema 1.

Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno tal que $AB < AC$. Os pontos médios dos lados AB e AC são M e N, respectivamente. Sejam P e Q pontos sobre a reta MN tais que $\angle CBP = \angle ACB$ e $\angle QCB = \angle ABC$. A circunferência circunscrita ao triângulo APB interseta a reta AC em D ($D \neq A$) e a circunferência circunscrita ao triângulo AQC interseta a reta AB em E ($E \neq A$). Demonstre que as retas BC, DP e EQ são concorrentes.

Problema 2.

Para cada inteiro positivo n, define-se T_n como o menor inteiro positivo tal que $1 + 2 + \cdots + T_n$ é múltiplo de n. Por exemplo, $T_5 = 4$ pois 1, $1 + 2$ e $1 + 2 + 3$ não são múltiplos de 5, mas $1 + 2 + 3 + 4$ é múltiplo de 5.

Determine todos os números inteiros positivos m tais que $T_m \geq m$.

Observação: Todo o inteiro positivo é múltiplo de si próprio.

Problema 3.

Seja $n \geq 2$ um inteiro. Uma sequência $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n números inteiros é chamada *limenha* se

$$\text{mdc}\{a_i - a_j \text{ tal que } a_i > a_j \text{ e } 1 \leq i, j \leq n\} = 1,$$

isto é, se o máximo divisor comum de todas as diferenças $a_i - a_j$, com $a_i > a_j$, é 1.

Uma *operação* consiste em escolher dois elementos a_k e a_ℓ da sequência, com $k \neq \ell$, e substituir a_ℓ por $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$.

Demonstre que, dada uma coleção de $2^n - 1$ sequências limenhas, cada uma formada por n números inteiros, existem duas destas sequências, digamos β e γ, tais que é possível transformar β em γ efetuando um número finito de operações.

Observações:

- As sequências $(1, 2, 2, 7)$ e $(2, 7, 2, 1)$ têm os mesmos elementos mas são diferentes.
- Se todos os elementos de uma sequência são iguais, então a sequência não é limenha.

Idioma: *Português*

Duração: *4 horas e 30 minutos*
Cada problema vale 7 pontos.

XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Lima - Perú, 2020

Terça feira, 17 de novembro de 2020

Segundo dia

Problema 4.
Demonstre que existe um conjunto $\mathcal{C}$ de 2020 inteiros positivos e distintos que cumpre simultaneamente as seguintes propriedades:

- Quando se calcula o máximo divisor comum de cada dois elementos de $\mathcal{C}$, obtém-se uma lista de números todos distintos.
- Quando se calcula o mínimo múltiplo comum de cada dois elementos de $\mathcal{C}$, obtém-se uma lista de números todos distintos.

Problema 5.
Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2),$$

para quaisquer dois números reais x e y.

Problema 6.
Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Sejam H o ortocentro e O o circuncentro do triângulo ABC, e seja P um ponto interior do segmento HO. A circunferência de centro P e raio PA interseta novamente as retas AB e AC nos pontos R e S, respetivamente. Denotamos por Q o ponto simétrico ao ponto P com respeito à mediatriz de BC. Demonstre que os pontos P, Q, R e S pertencem a uma mesma circunferência.

Idioma: *Português*

Duração: *4 horas e 30 minutos*
Cada problema vale 7 pontos.