XXXI Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Quinta-feira, 3 de Dezembro de 2020

Problema 1. Ari e Beri jogam um jogo com um baralho de 2020 cartas. Cada carta tem um número inteiro de 1 a 2020 e há exatamente uma carta com cada número. Ari escolhe uma carta do baralho com um número a e a retira do baralho. Beri vê a carta que Ari escolheu, escolhe outra carta do baralho com um número b e a retira do baralho. Em seguida Beri escreve no quadro exatamente um dos trinômios $x^2 - ax + b$ ou $x^2 - bx + a$ a sua escolha. Este processo se repite até que todas as cartas tenham sido retiradas. Se ao finalizar o jogo todos os trinômios escritos no quadro possuem raízes inteiras, então Beri ganha o jogo. Caso contrário, Ari ganha. Demonstrar que Beri tem uma estratégia vencedora, ou seja, Beri sempre ganha, não importa como jogue Ari.

Problema 2. Dados 2021 inteiros positivos distintos não divisíveis por 2^{1010}, demonstrar que é sempre possível escolher 3 deles, digamos a, b e c, tais que $|b^2 - 4ac|$ não seja um quadrado perfeito. (Observação: $|x|$ representa o valor absoluto de x.)

Problema 3. Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AC < BC$, e ω a circunferência que passa por A, B e C. Seja M o ponto médio de BC. Seja F um ponto na reta AB tal que $CA = CF$ e seja E um ponto na reta BC tal que $EB = EF$. A reta AM intersecta ω em um ponto D (diferente de A). A reta DE intersecta a reta FM em G. Demonstrar que G pertenece ω.

Idioma: Português | *Duração: 4 h*

Cada problema vale 10 pontos

XXXI Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Sexta-feira, 4 de Dezembro de 2020

Problema 4. Considere um triângulo acutângulo escaleno ABC. Considere os pontos variáveis D e E nas semirretas AB e AC (com origem em A) tais que o simétrico de A em relação à reta DE está sobre o lado BC. As circunferências de diâmetro AD e AE se intersectam novamente no ponto P, distinto de A. Encontre o lugar geométrico dos pontos P ao variar o segmento DE.

Problema 5. Há uma pilha com 15 fichas em uma mesa. A cada passo, Pedro escolhe uma das pilhas na mesa com $a > 1$ fichas, divide em duas pilhas com $b \geq 1$ e $c \geq 1$ fichas e escreve no quadro o produto abc. Ele continua até ter 15 pilhas com 1 ficha cada. Determine todos os valores possíveis para a soma final dos números escritos no quadro.

Problema 6. Um tabuleiro quadrado 4×4 é chamado *brasuca* se satisfaz todas as seguintes condições:

- cada casa contém um dos números 0, 1, 2, 3, 4 ou 5;
- a soma dos números em cada linha é 5;
- a soma dos números em cada coluna é 5;
- a soma dos números em cada diagonal de quatro casas é 5;
- o número escrito na casa superior esquerda do tabuleiro é menor ou igual aos outros números do tabuleiro;
- ao se dividir o tabuleiro em quatro quadrados 2×2, em cada um deles a soma dos quatro números é 5.

Quantos tabuleiros brasucas existem?

Idioma: Português

Duração: 4 h
Cada problema vale 10 pontos