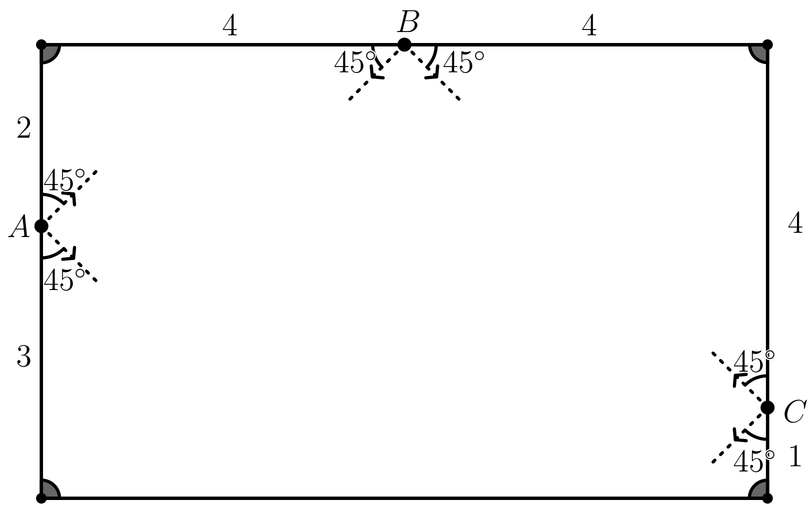
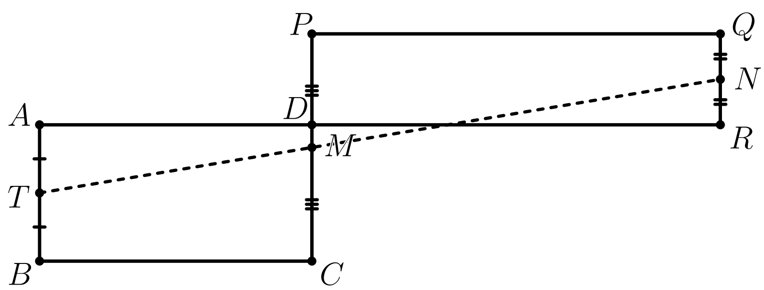
6^{th} **Iranian Geometry Olympiad**
Nível Elementar
6 de setembro de 2019

Os problemas desta prova devem ser mantidos confidenciais até que eles sejam disponibilizados no site oficial da IGO: igo-official.ir

1) Há uma mesa com o formato de um retângulo 8×5 e que possui um buraco em cada canto. Após atirar uma bola dos pontos A, B e C pelos caminhos indicados, ela cairá em algum dos buracos após 6 reflexões? (A bola reflete com o mesmo ângulo após o contato com um dos lados da mesa.)



2) Como mostrado na figura, há dois retângulos $ABCD$ e $PQRD$ com mesma área, e lados correspondentes paralelos. Sejam N, M e T os pontos médios dos segmentos QR, PC e AB, respectivamente. Prove que os pontos N, M e T estão sobre a mesma reta.



3) Há $n > 2$ retas no plano em posição geral, ou seja, quaisquer duas delas se encontram, mas não há 3 concorrentes. Todos os seus pontos de interseção são marcados, e então as retas são removidas, porém os pontos marcados ficam. Para cada ponto marcado, não são conhecidas as duas retas que se encontram nele. É possível descobrir onde está cada reta e restaurar todas?

4) O quadrilátero $ABCD$ é dado tal que

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ,$$

e

$$AB = BD - AC.$$

As retas AB e CD se intersectam no ponto E. Prove que $\angle ADB = 2\angle BEC$.

5) Em um polígono convexo (i.e. todos os seus ângulos são menores que 180°), chame uma diagonal de *bissetora* se ela bissecta tanto a área quanto o perímetro do polígono. Qual é o maior número de diagonais bissetoras que um pentágono convexo pode ter?

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.

6^{th} Iranian Geometry Olympiad

Nível Intermediário

6 de setembro de 2019

Os problemas desta prova devem ser mantidos confidenciais até que eles sejam disponibilizados no site oficial da IGO: igo-official.ir

1) Duas circunferências ω_1 e ω_2 de centros O_1 e O_2, respectivamente, intersectam-se nos pontos A e B, e o ponto O_1 pertence a ω_2. Seja P um ponto arbitrário de ω_1. As retas BP, AP e O_1O_2 intersectam ω_2 novamente nos pontos X, Y e C, respectivamente. Prove que o quadrilátero $XPYC$ é um paralelogramo.

2) Determine todos os quadriláteros $ABCD$ tais que os quatro triângulos DAB, CDA, BCD e ABC são semelhantes entre si.

3) Três circunferências ω_1, ω_2 e ω_3 passam por um ponto comum P. A reta tangente a ω_1 por P intersecta ω_2 e ω_3 novamente nos pontos $P_{1,2}$ e $P_{1,3}$, respectivamente. Os pontos $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ são definidos analogamente. Prove que a mediatriz dos segmentos $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ e $P_{3,1}P_{3,2}$ são concorrentes.

4) Sejam $ABCD$ um paralelogramo e K um ponto na reta AD tal que $BK = AB$. Seja P um ponto arbitrário de AB, e suponha que a mediatriz de PC intersecta o circuncírculo do triângulo APD nos pontos X e Y. Prove que o circuncírculo do triângulo ABK passa pelo ortocentro do triângulo AXY.

5) Seja ABC um triângulo tal que $\angle A = 60°$. Os pontos E e F são os pés das bissetrizes internas dos vértices B e C, respectivamente. Sejam P e Q pontos no plano tais que $BFPE$ e $CEQF$ são paralelogramos. Prove que $\angle PAQ > 150°$. (Considere o ângulo PAQ que não contém o lado AB do triângulo.)

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.

6^{th} **Iranian Geometry Olympiad**

Nível Avançado

6 de setembro de 2019

Os problemas desta prova devem ser mantidos confidenciais até que eles sejam disponibilizados no site oficial da IGO: igo-official.ir

---

1) Duas circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam em dois pontos A e B. O ponto C está sobre a reta tangente por A à ω_1 de modo que $\angle ABC = 90°$. Uma reta ℓ arbitrária passando por C intersecta ω_2 nos pontos P e Q. As retas AP e AQ intersectam ω_1 pela segunda vez nos pontos X e Z, respectivamente. Seja Y o pé da altura de A em relação a reta ℓ. Prove que os pontos X, Y e Z são colineares.

2) É verdade que para todo $n-$ágono convexo com $n > 3$, existe um vértice e uma diagonal passando por este vértice tais que os ângulos determinados por esta diagonal com os dois lados adjacentes a este vértice sejam agudos?

3) Duas circunferências ω_1 e ω_2 possuem centros O_1 e O_2, respectivamente. Essas duas circunferências se intersectam nos pontos X e Y. Seja AB uma reta tangente à ambos os círculos de maneira que A está em ω_1 e B está em ω_2. Tomando as tangentes à ω_1 e ω_2 por X, sejam K e L suas respectivas interseções com a reta O_1O_2. Suponha que a reta BL intersecta ω_2 pela segunda vez em M e que a reta AK intersecta ω_1 pela segunda vez em N. Prove que as retas AM, BN e O_1O_2 são concorrentes.

4) Seja ABC um triângulo acutângulo não isósceles e Γ seu circuncírculo. Seja M o ponto médio do segmento BC e N o ponto médio do arco BC de Γ que não contém A. X e Y são pontos sobre Γ tais que $BX \parallel CY \parallel AM$. Assuma que exista um ponto Z sobre o segmento BC tal que o circuncírculo do triângulo XYZ é tangente à BC. Seja ω o circuncírculo do triângulo ZMN. A reta AM intersecta ω uma segunda vez em P. Seja K um ponto em ω tal que $KN \parallel AM$, ω_b uma circunferência passando por B, X e tangente à BC e ω_c uma circunferência passando por C, Y e tangente à BC. Prove que a circunferência de centro K e raio KP é tangente às três circunferências ω_b, ω_c e Γ.

5) Sejam A, B e C pontos sobre uma parábola Δ tais que o ponto H, ortocentro do triângulo ABC, coincide com o foco da parábola Δ. Prove que ao alterar a posição dos pontos A, B e C em Δ de maneira que o ortocentro permaneça em H, o inraio do triângulo ABC permanece fixo.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.

Cada problema vale 8 pontos.