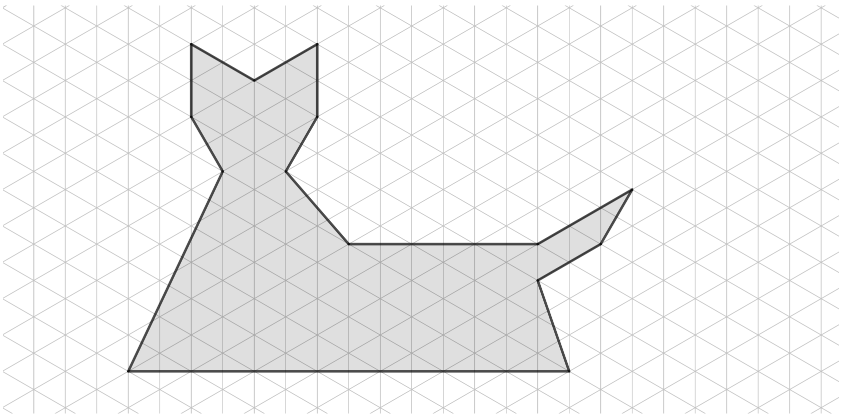
7th Iranian Geometry Olympiad

Elementary level

30 de outubro de 2020

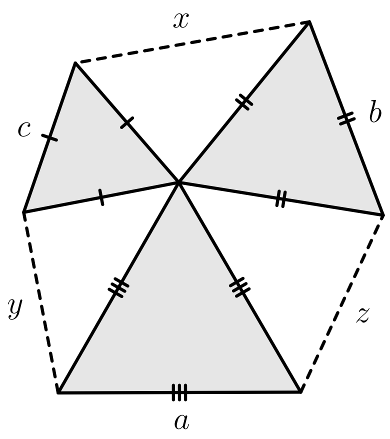
Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até serem postados no site oficial da IGO: igo-official.ir

Problema 1. Por uma *dobra* de um papel em forma de polígono, nós entendemos desenhar um segmento reto sobre o papel e dobrar o papel ao longo deste segmento. Supondo que um papel com a seguinte figura é dado. Nós cortamos o papel ao longo das bordas da região sombreada para conseguir um papel em forma de polígono.
Comece com este polígono sombreado e obtenha, com no máximo 5 dobras, um retângulo. Descreva sua solução mostrando as linhas de dobras e desenhando a forma da figura após cada dobra na sua folha de resposta.
(Observe que as linhas de dobra não precisam coincidir com as linhas de grade da figura.)



Problema 2. Um paralelograma $ABCD$ é dado ($AB \neq BC$). Os pontos E e G são escolhidos sobre a reta CD tais que AC é a bissetriz de ambos os ângulos $\angle EAD$ e $\angle BAG$. A reta BC intersepta AE e AG em F e H, respectivamente. Prove que a reta FG passa no ponto médio de HE.

Problema 3. De acordo com a figura, três triângulos equiláteros com comprimentos de lado a, b, c têm um vértice comum e não tem nenhum outro ponto em comum. Os comprimentos x, y e z são definidos como mostra a figura. Prove que $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.



Problema 4. Seja P um ponto qualquer no interior do triângulo ABC. As retas BP e CP interseptam AC e AB em E e F, respectivamente. Sejam K e L os pontos médios dos segmentos BF e CE, respectivamente. Sejam as retas que passam em L e K e são paralelas a CF e BE, elas interceptam BC em S e T, respectivamente; além disso, sejam M e N as reflexões de S e T sobre os pontos L e K, respectivamente. Prove que conforme P se move no interior do triângulo ABC, a reta MN passa por um ponto fixo.

Problema 5. Dizemos que dois vértices de um polígono simples são *visíveis* um do outro se eles são adjacentes, ou se o segmento que os une está completamente dentro do polígono (exceto as duas extremidades do segmento). Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existe um polígono simples com n vértices em que cada vértice seja visível por exatamente 4 outros vértices. (Um polígono simples é um polígono sem buraco e que não se intercepta.)

Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 pontos.

7ª OLIMPÍADA IRANIANA DE GEOMETRIA

Nível Intermediário

Sexta-feira, 30 de Outubro de 2020.

Os problemas devem ser mantidos em sigilo até serem postados no website oficial da IGO: http://igo-official.ir

---

01. É dado um trapézio $ABCD$ onde AB e CD são paralelos. Seja M o ponto médio do segmento AB. O ponto N está localizado sobre o segmento CD tal que $\angle ADN = \frac{1}{2}.\angle MNC$ e $\angle BCN = \frac{1}{2}.\angle MND$. Prove que N é o ponto médio do segmento CD.

02. Seja ABC um triângulo isósceles $(AB = AC)$ com circuncentro O. O ponto N é o ponto médio do segmento BC e o ponto M é a reflexão do ponto N com respeito ao lado AC. Suponha que T é um ponto tal que $ANBT$ é um retângulo. Prove que $\angle OMT = \frac{1}{2}.\angle BAC$.

03. No triângulo acutângulo ABC $(AC > AB)$, o ponto H é o ortocentro e o ponto M é o ponto médio do segmento BC. A mediana AM intersecta o circuncírculo do triângulo ABC em X. A reta CH intersecta a mediatriz de BC em E e o circuncírculo do triângulo ABC novamente em F. O ponto J está sobre o círculo ω, passando através de X, E e F, tal que $BCHJ$ é um trapézio $(CB \parallel HJ)$. Prove que JB e EM se encontram em ω.

04. O triângulo ABC é dado. Um círculo arbitrário com centro J, passando por B e C, intersecta os lados AC e AB em E e F, respectivamente. Seja X um ponto tal que o triângulo FXB é semelhante ao triângulo EJC (com a mesma ordem) e os pontos X e C estão no mesmo lado da reta AB. Similarmente, seja Y um ponto tal que o triângulo EYC é semelhante ao triângulo FJB (com a mesma ordem) e os pontos Y e B estão no mesmo lado da reta AC. Prove que a reta XY passa pelo ortocentro do triângulo ABC.

05. Ache todos os números $n \geq 4$ tal que existe um poliedro convexo com exatamente n faces, tal que todas as faces são triângulos retângulos.
(Note que o ângulo entre qualquer par de faces adjacentes em um poliedro convexo é menor que 180°.)

Tempo: 4h e 30 min.
Cada problema vale 8 pontos.

7^{th} **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Avançado

30 de Outubro, 2020

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo at´e serem postados no site oficial da IGO: igo-official.ir

---

Problema 1. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, AC e AB do triângulo ABC, respectivamente. Os pontos E e F estão sobre o segmento BC de modo que $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ e $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Prove que $AE = AF$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo com incentro I. Suponha que N é o ponto médio do arco BAC do circuncírculo do triângulo ABC e seja P um ponto tal que $ABPC$ é um paralelogramo. Seja Q a reflexão de A sobre N e R a projeção de A sobre QI. Mostre que a reta AI é tangente ao circuncírculo do triângulo PQR.

Problema 3. Assuma que três circunferências mutuamente externas entre si possuem a propriedade que toda reta separando duas delas possui interseção com o interior da terceira. Prove que a soma das distâncias duas a duas entre seus centros é no máximo $2\sqrt{2}$ vezes a soma dos seus raios.
(Uma reta separa dois círculos quando os círculos não possuem interseção com a reta e estão em semiplanos opostos determinados por ela.)

Nota. Resultados mais fracos com $2\sqrt{2}$ substituído por outro valor de c podem receber pontos a depender do valor de $c > 2\sqrt{2}$.

Problema 4.
O quadrilátero convexo circunscritível $ABCD$ com incentro I é tal que o seu incírculo é tangente a AD, DC, CB e BA em K, L, M e N. As retas AD e BC se encontram em E e as retas AB e CD se encontram em F. A reta KM intersecta AB e CD em X e Y, respectivamente. A reta LN intersecta AD e BC em Z e T, respectivamente. Prove que o circuncírculo do triângulo XFY e o circunferência com diâmetro EI são tangentes se, e somente se, o circuncírculo do triângulo TEZ e o circunferência com diâmetro FI são tangentes.

Problema 5. Considere um triângulo acutângulo ABC ($AC > AB$) com ortocentro H e circuncentro Γ. Os pontos M e P são os pontos médios dos segmentos BC e AH, respectivamente. A reta AM encontra Γ novamente em X e o ponto N está sobre a reta BC de modo que NX é tangente a Γ. Os pontos J e K estão sobre o círculo com diâmetro MP de modo que $\angle AJP = \angle HNM$ (B e J estão sobre o mesmo lado de AH) e o círculo ω_1, passando por K, H, e J, e o círculo ω_2, passando por K, M, and N, são mutuamente externamente tangentes entre si. Prove que as tangentes externas comuns de ω_1 e ω_2 se intersectam sobre a reta NH.

Duração: 4 horas and 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.