Competição Elon Lages Lima de Matemática
29 de janeiro de 2021

1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 1000 \\ 1001 & 1002 & \dots & 2000 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 999001 & 999002 & \dots & 1000^2 \end{pmatrix}$$

Escolha qualquer entrada e a denote por x_1. Em seguida, apague a linha e coluna contendo x_1 para obtemos uma matriz 999×999. Então escolha qualquer entrada e a denote por x_2. Apague a linha e a coluna contendo x_2 para obter uma matriz 998×998. Realize essa operação 1000 vezes. Determine o valor da soma

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1000}.$$

(a) 1000

(b) $\dfrac{1000^3 + 1000}{2}$

(c) 1000^2

(d) $\dfrac{1000^2 + 1000}{2}$

(e) $\dfrac{1001}{2}$

Gabarito: B

2. Quantos termos racionais aparecem na expansão binomial de

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt{6})^{100}?$$

(a) 16

(b) 17

(c) 66

(d) 33

(e) 50

Gabarito: B

3. Seja $f : \{1, 2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(n) - f(n+1) = f(n)f(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Sabendo que $f(2020) = \frac{1}{4040}$, o valor de $f(1)$ é:

(a) $\dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{1}{4040}$

(c) $\dfrac{1}{2021}$

(d) 1

(e) $\dfrac{1}{2020}$

Gabarito: C

4. Considere a sequência a_n definida por $a_1 = 2$ e para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = (a_n)^2 + 6a_n + 6.$$

Determine o resto de a_{100} na divisão por 7.

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) 4

Gabarito: B

5. Considere o número real, escrito em notação decimal,

$$r = 0,235831\ldots$$

em que, a partir da terceira casa decimal após a vírgula, todo dígito é igual ao resto na divisão por 10 da soma dos dois dígitos anteriores. Podemos afirmar que

(a) $(10^{60} - 1) \cdot r$ é inteiro

(b) $(10^{25} - 1) \cdot r$ é inteiro

(c) $(10^{17} - 1) \cdot r$ é inteiro

(d) r é irracional algébrico

(e) r é irracional não algébrico

(Lembre que um número complexo é dito algébrico se ele é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes inteiros)

Gabarito: A

6. Considere a sequência a_n definida por $a_1 = 337$ e, para $n > 1$,

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + n - 2} a_{n-1}.$$

Determine $\lim\limits_{n\to\infty} (2020 + n)a_n$.

(a) 337

(b) 674

(c) 1011

(d) 2022

(e) 4044

Gabarito: D

7. Encontre o valor de

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (x^{3k+1} - x^{3k+2}) \right) dx\,.$$

(a) 1

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\dfrac{\ln 2}{2}$

(d) $\dfrac{\ln 3}{2}$

(e) $\dfrac{\ln 3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{18}$

Gabarito: E

8. Calcule $\lim_{x\to\infty} (\text{sen}(\sqrt{x+1}) - \text{sen}(\sqrt{x}))$.

(a) $+\infty$

(b) $-\infty$

(c) 0

(d) 1/2

(e) 1

Gabarito: C

9. Em uma moeda viciada, a probabilidade de se obter cara é 1/5. Um jogador lança sucessivamente esta moeda até obter duas caras consecutivas. Qual é o número esperado de tais lançamentos?

(a) 10

(b) 25

(c) 30

(d) 40

(e) 64

Gabarito: C

10. Seja $f_1(x) = x^2 + 4x + 2$, e para $n \geq 2$, seja $f_n(x)$ a n-ésima composição do polinômio $f_1(x)$ consigo mesmo. Por exemplo,

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 14.$$

Seja s_n a soma dos coeficientes dos termos de grau par de $f_n(x)$. Por exemplo, $s_2 = 1 + 24 + 14 = 39$. Encontre o valor de s_{2020}

(a) 0

(b) 12357

(c) $2^{3^{2019}}$

(d) $3^{2021} + 3 \cdot 2^{2020}$

(e) $\dfrac{3^{2^{2020}} - 3}{2}$

Gabarito: E

11. Considere a curva plana E de equação $y^2 = 4x^3 - 4x^2 + 1$ e a função $T\colon E \to E$ a seguir. Dado um ponto $P \in E$, seja r a reta tangente a E no ponto P; se r intercepta E em dois pontos, defina $T(P) \in E$ como sendo o ponto de interseção distinto de P, caso contrário defina $T(P) = P$. Sendo $P_0 = (0,1)$ e $P_{n+1} = T(P_n)$ para $n \geq 0$, então

(a) $P_{2021} = (0, -1)$

(b) $P_{2021} = (0, 1)$

(c) $P_{2021} = (1, 1)$

(d) $P_{2021} = (1/2, \sqrt{2}/2)$

(e) $P_{2021} = (1, -1)$

Gabarito: C

12. Encontre o número de inteiros positivos n menores que 2020 tais que o polinômio

$$(x^4 - 1)^n + (x^2 - x)^n$$

seja divisível por $x^5 - 1$.

(a) 202

(b) 201

(c) 1010

(d) 2020

(e) 20

Gabarito: A

13. Seja $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ o grupo dos quatérnions, cujo produto (não comutativo) é determinado pelas equações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Escolhendo-se aleatoriamente e independentemente dois elementos $a, b \in Q_8$ (não necessariamente distintos), qual a probabilidade de que $ab = ba$?

(a) 5/16

(b) 3/8

(c) 1/2

(d) 5/8

(e) 3/4

Gabarito: D

14. Sobre o número $\theta = \cos(2\pi/11)$, podemos afirmar que

(a) é raiz do polinômio $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

(b) é raiz do polinômio $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(c) é raiz do polinômio $32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$

(d) θ não é algébrico

(e) é raiz do polinômio $32x^5 - 26x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 1$

Gabarito: C

15. Joãozinho escreveu em seu caderno a expressão

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1+1}{5+6} = \frac{2}{11}$$

Sua professora disse que a expressão estava errada, ao que Joãozinho retrucou: "Não se estivermos trabalhando no corpo finito $\mathbb{F}_p$ com p elementos." A afirmação de Joãozinho é correta para

(a) $p = 61$

(b) $p = 13$

(c) $p = 43$

(d) $p = 101$

(e) $p = 103$

Gabarito: A

16. Para um inteiro positivo n, considere todas as funções não crescentes $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Algumas delas possuem pontos fixos, i.e., admitem c tal que $f(c) = c$, enquanto algumas outras não possuem tal propriedade. Determine a diferença entre os tamanhos desses dois conjuntos de funções.

(a) $\binom{2n-2}{n-2}$

(b) $\binom{2n-1}{n-2}$

(c) $\binom{2n}{n}$

(d) $\frac{1}{n} \cdot \binom{2n-1}{n-1}$

(e) n^2

(Uma função f é dita não crescente se $f(x) \geq f(y)$ para quaisquer $x \leq y$ pertencentes ao seu domínio)

Gabarito: Anulada. A resposta deveria ser a letra D, mas em virtude de um erro de digitação não apareceu a opção $\frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1}$. Todos os estudantes ganharão a pontuação deste problema.

17. O valor do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

é igual a

(a) 0

(b) 1

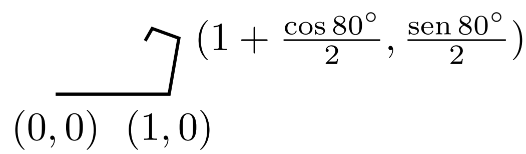
(c) $\pi/2$

(d) -1

(e) π

Gabarito: B

18. *Tardigrados*, também conhecidos como *ursos d'água*, são os únicos animais nativos do planeta Terra capazes de sobreviver às condições do espaço extraterrestre sem a ajuda de equipamentos de que se tem conhecimento (para saber mais, veja por exemplo o artigo na Wikipedia). Neste exercício, um tardigrado anda no plano $\mathbb{R}^2$, saindo da origem $(0,0)$ e andando 1 unidade até $(1,0)$; em seguida, ele vira para a esquerda 80° e anda mais $1/2$ unidade até $\left(1+\frac{\cos 80^\circ}{2}, \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{2}\right)$; em seguida, vira novamente para a esquerda 80° e anda mais $1/4$ unidade; em seguida, vira para a esquerda 80° novamente e anda mais $1/8$ unidade e assim por diante, sempre virando à esquerda 80° e andando metade da distância que andou na vez anterior. Eventualmente ele convergirá a um ponto. Qual?



(a) $\left(\dfrac{4+\cos 80^\circ}{3-2\cos 80^\circ}; \dfrac{\operatorname{sen} 80^\circ}{3-2\cos 80^\circ}\right)$

(b) $\left(\dfrac{2\cos 80^\circ}{5-4\cos 80^\circ}; \dfrac{\operatorname{sen} 80^\circ}{5-4\cos 80^\circ}\right)$

(c) $\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} 80^\circ}{1-\operatorname{sen} 80^\circ}; \dfrac{\cos 80^\circ}{1-\operatorname{sen} 80^\circ}\right)$

(d) $\left(\dfrac{4-2\cos 80^\circ}{5-4\cos 80^\circ}; \dfrac{2\operatorname{sen} 80^\circ}{5-4\cos 80^\circ}\right)$

(e) $\left(\dfrac{4-2\operatorname{sen} 80^\circ}{5-4\operatorname{sen} 80^\circ}; \dfrac{2\cos 80^\circ}{5-4\operatorname{sen} 80^\circ}\right)$

Gabarito: D

19. O limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/k}}\right)}{n}$$

é dado por:

(a) 1

(b) 2

(c) π

(d) $\pi^2/6$

(e) e

Gabarito: A

20. Para cada inteiro positivo n, seja

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(2nx)\tan(x)\,dx.$$

Se $I_1 = A$ e $I_2 = B$, então I_{2020} vale

(a) $A + B$

(b) A

(c) B

(d) $A - B$

(e) $2B$

Gabarito: C

21. Considere o conjunto de matrizes reais 3×3 dado por

$$T = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t J A = J \right\},$$

em que A^t denota a transposta de A e J é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se v é o vetor $v = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, visto como vetor coluna, qual dos seguintes itens descreve o subconjunto $\{A \cdot v \in \mathbb{R}^3 \mid A \in T\}$ de $\mathbb{R}^3$?

(a) o hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(b) a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(c) o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

(d) o elipsoide $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$

(e) o hiperboloide $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$

Gabarito: A

22. Uma cônica é uma curva em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\},$$

onde a, b, c, d, e, f não são todos nulos (alguns de seus exemplos são elipses, hipérboles e parábolas). São fixados três pontos distintos no plano e duas retas não coincidentes. Quantas cônicas, no máximo, contêm os três pontos e são tangentes às duas retas?

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

(e) 6

Gabarito: C

23. Qual é o menor grau de um polinômio $p(x)$, mônico e de coeficientes inteiros, de modo que $p(n)$ seja múltiplo de 2021 para todo inteiro positivo n?

(a) 43.

(b) 44.

(c) 45.

(d) 46.

(e) 47.

(Lembre que um polinômio é dito mônico se o coeficiente do seu termo de maior grau é 1)

Gabarito: E

24. A quantidade de soluções da equação $y^2 = x^3$ (uma curva elíptica singular) em $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$ é igual a:

(a) 1

(b) 3

(c) 19

(d) 36

(e) 57

Gabarito: E

25. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada na base standard pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1/10 & 71/10 & -29/10 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 7/5 & -18/5 & 22/5 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é $p(x) = (x-3)^2(x+2)$. Seja $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid T\mathbf{v} = -2\mathbf{v}\}$ o autoespaço associado ao autovalor -2. Qual das seguintes transformações lineares $\pi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ é uma *projeção* sobre V (ou seja, $\pi(\mathbb{C}^3) = V$ e $\pi^2 = \pi$)? Aqui, $I\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ denota a identidade.

(a) $\pi = \dfrac{1}{25}(T^2 - 6T + 9I)$

(b) $\pi = \dfrac{1}{25}(-T^2 + 6T + 16I)$

(c) $\pi = T^2 - T - 6I$

(d) $\pi = \dfrac{1}{3}(T^2 + 6T + 16I)$

(e) $\pi = \dfrac{1}{3}(-T^2 - 5T + 2I)$

Gabarito: A