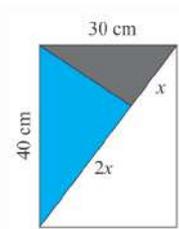


42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)

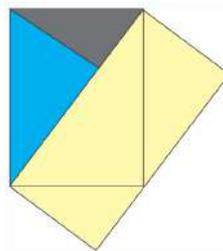


1. Um retângulo foi dividido em 3 triângulos, um branco, um cinza e um azul. O lado do triângulo azul sobre a diagonal do retângulo tem o dobro do comprimento do lado do triângulo cinza sobre essa diagonal.



- a) Qual é a área do triângulo branco?
- b) Qual é a área do triângulo azul?

Desenhemos um retângulo que tem como um dos lados a diagonal do retângulo original. O lado oposto a esse lado nesse novo retângulo passa por um dos vértices do retângulo original.



- c) Qual é a área do retângulo amarelo?

2. Em um dado comum a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7.

A figura 1 mostra um tabuleiro com 9 casas quadradas, estando uma vazia e as outras assinaladas com as letras do alfabeto de A até H. A figura 2 mostra um dado comum ocupando a casa vazia desse tabuleiro.

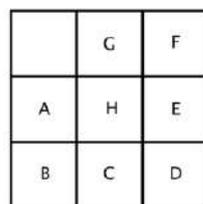


Figura 1



Figura 2

O dado rola sobre uma aresta, sem deslizar, para ocupar a casa A. Em seguida, rola sobre outra aresta para ocupar a casa B, e assim por diante, rolando e seguindo o alfabeto até ocupar a casa central H. Terminado o percurso:

- a) Qual é o número da face de cima do dado?
- b) Considerando a posição do dado ao chegar na casa central H e o mesmo ponto de vista da Figura 2, quais são os números das outras duas faces visíveis? Justifique sua resposta.

42ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)



3. Ao dividir um número inteiro por outro número inteiro, podemos obter um resultado inteiro ou não. Por exemplo, $12/3 = 4$ é inteiro e $5/4 = 1,25$ não é inteiro. Existem divisões em que o resultado não é inteiro e, mesmo usando casas após a vírgula, a divisão nunca acaba e temos um número com representação decimal infinita. Por exemplo, $1/3 = 0,333\dots$ e chamamos $0,333\dots$ de representação decimal de $1/3$.

- Juca observou que $7/33 = 0,212121\dots$. Podemos observar as somas dos dígitos das casas iniciais após a vírgula, $2, 2 + 1 = 3, 2 + 1 + 2 = 5$ e assim por diante. Quantas casas iniciais após a vírgula da representação decimal de $7/33$ Juca precisaria somar para obter exatamente 1202?
- Mostre que não é possível Juca somar os dígitos de uma quantidade de casas iniciais após a vírgula da representação decimal de $7/33$ para obter exatamente 2020.
- Juca observou a representação decimal de $11/41$. Quantas casas iniciais após a vírgula Juca precisaria somar para obter um resultado maior que ou igual a 2021?

4. Os números primos são aqueles inteiros positivos que possuem exatamente dois divisores positivos distintos: 1 e ele mesmo. Os primeiros números primos positivos são

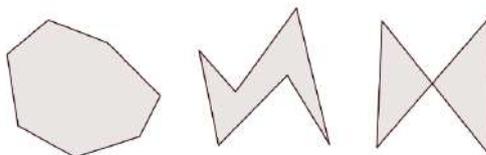
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, A, 31, 37, 41, B, 47, 53, 59, 61, 67, 71, C, 79, 83, 89, D, 101, ...

- Alguns primos foram representados por A, B, C e D. Determine esses primos.

Um número inteiro positivo é dito *primadoido* se possui dois ou mais algarismos, todos os seus algarismos são distintos entre si e cada dois algarismos consecutivos formam um número primo. Por exemplo, 413 é primadoido, pois 41 e 13 são primos, mas 143 e 313 não são primadoidos, pois 14 não é primo e 313 não possui todos os algarismos distintos.

- Prove que um número de seis algarismos \overline{ABCDEF} não pode ser primadoido.
- Encontre o maior número primadoido.

5. Um polígono simples é determinado pela união de segmentos de reta conectando pontos consecutivos de uma sequência de pontos no plano considerando que o último ponto e o primeiro são consecutivos. Os pontos são chamados de vértices do polígono e os segmentos são chamados de lados. Essa sequência de pontos não pode possuir três pontos consecutivos alinhados e os segmentos de reta não podem possuir pontos de interseção além dos vértices entre segmentos consecutivos. A seguir temos dois exemplos de polígonos simples e um exemplo que não é um polígono simples.



- Desenhe um polígono simples de 4 lados e uma reta que não contém qualquer vértice, mas corta os 4 lados desse polígono.
- Diga se é possível desenhar um polígono simples de 20 lados e uma reta que não contém qualquer vértice e corta os 20 lados desse polígono. Se for possível, mostre um desenho. Se não for, explique o porquê.

- c) Considere um polígono simples de 21 lados. Explique o porquê de não ser possível desenhar uma reta que corte exatamente 17 lados desse polígono sem passar por qualquer dos vértices desse polígono.
- d) Faça um esboço de um polígono simples de 21 lados e 10 retas tais que essas retas não passam por vértices e as quantidades de lados cortados por essas retas são todas distintas.
-