

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA



1. Seja ABC um triângulo acutângulo, e D um ponto sobre BC tal que AD é perpendicular a BC . A bissetriz do ângulo $\angle DAC$ intesecta o segmento DC em E . Seja F o ponto sobre a reta AE tal que BF é perpendicular a AE . Se $\angle BAE = 45^\circ$, calcule a medida do ângulo $\angle BFC$.

2. Em uma lousa encontra-se o seguinte texto:

A equação $x^2 - 824x + \blacksquare 143 = 0$ possui duas soluções inteiras.

Onde \blacksquare representa alguma quantidade de algarismos de um número que está borrada na lousa. Quais são as possíveis equações originalmente na lousa?

3. Consideremos uma sequência infinita x_1, x_2, \dots de números inteiros positivos tais que, para todo inteiro $n \geq 1$:

- Se x_n é par, então $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$;
- Se x_n é ímpar, então $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2} + 2^{k-1}$, onde k é o inteiro tal que $2^{k-1} \leq x_n < 2^k$.

Determine o menor valor possível de x_1 para o qual a sequência contenha algum termo igual a 2020.

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA



4. Um número inteiro positivo é dito *cilíndrico* se o primeiro algarismo e o último algarismo de sua representação decimal são iguais. Por exemplo, 4 e 4104 são cilíndricos, pois os seus primeiros e últimos algarismos são 4, mas 10 não é cilíndrico, pois o seu primeiro algarismo é 1, enquanto o seu último algarismo é 0.

Um número cilíndrico é dito *supercilíndrico* se pode ser escrito como a soma de dois números cilíndricos. Por exemplo $101 = 99 + 2$ e $22 = 11 + 11$ são supercilíndricos, mas $561 = 484 + 77$ não é supercilíndrico, pois não é cilíndrico.

Quantos números de 4 algarismos são supercilíndricos?

5. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O . Seja M o ponto médio de AB e $K \neq C$ o segundo ponto de interseção dos circuncírculos dos triângulos ABC e CMO . As retas CK e OM encontram-se em P . Prove que $\angle KAP = \angle MCB$.

6. Seja k um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro 2020×2020 . Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha.

Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem k casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente.

Quais são os valores de k para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora?