42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Prove que existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{3a_3} + \cdots + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1.$$

---

2. Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1$, $F_2^{(a)} = a$ e, para $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{n-2}^{(a)}$. Um inteiro positivo é *fibonático* quando é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e algum $n > 3$. Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.

---

3. Sejam r_A, r_B e r_C semirretas de origem P. O círculo ω_a, de centro X, é tangente a r_B e r_C; o círculo ω_b, de centro Y, é tangente a r_C e r_A; e o círculo ω_c, de centro Z, é tangente a r_A e r_B. Suponha que P está no interior do triângulo XYZ, de modo que r_A, r_B e r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_b e ω_c que não contém r_A, s_B a reta tangente internamente a ω_c e ω_a que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_a e ω_b que não contém r_C. Prove que s_A, s_B e s_C têm um ponto comum Q, e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ, ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle XYZ$.

42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

4. Seja ABC um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados BC, CA e AB nos pontos U, V e W, respectivamente. Sejam r_u a reta que passa por U e é perpendicular a BC, r_v a reta que passa por V e é perpendicular a CA e r_w a reta que passa por W e é perpendicular a AB. Prove que as retas r_u, r_v e r_w passam por um mesmo ponto.

---

5. Sejam n e k números inteiros positivos com $k \leq n$. Em um grupo de n pessoas, cada uma ou sempre fala a verdade ou sempre mente. Arnaldo pode fazer perguntas para quaisquer dessas pessoas desde que essas perguntas sejam do tipo: "No conjunto A, qual a paridade de pessoas que falam a verdade?", onde A é um subconjunto de tamanho k do conjunto das n pessoas. A resposta só pode ser "par" ou "ímpar".

(a) (4 pontos) Para quais valores de n e k é possível determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem?

(b) (6 pontos) Qual o número mínimo de perguntas necessárias para determinar quais pessoas falam a verdade e quais pessoas sempre mentem, quando esse número é finito?

---

6. Sejam $f(x) = 2x^2 + x - 1$, $f^0(x) = x$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para todo x real e $n \geq 0$ inteiro (ou seja, f^n é a n-ésima iterada de f).

(a) (2 pontos) Determine o número de soluções reais distintas da equação de $f^3(x) = x$.

(b) (8 pontos) Determine, para cada $n \geq 0$ inteiro, o número de soluções reais distintas da equação $f^n(x) = 0$.