42ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

1. Para $R > 0$ inteiro, denote por $n(R)$ a quantidade de triplas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tais que $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = R$. Qual o valor de

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{n(1) + n(2) + \ldots + n(R)}{R^{3/2}}?$$

2. Para a inteiro positivo, defina $F_1^{(a)} = 1$, $F_2^{(a)} = a$ e, para $n > 2$, $F_n^{(a)} = F_{n-1}^{(a)} + F_{n-2}^{(a)}$. Um inteiro positivo é *fibonático* quando é igual a $F_n^{(a)}$ para algum a inteiro positivo e algum $n > 3$. Prove que existem infinitos números inteiros que não são fibonáticos.

3. Seja $\mathbb{F}_{13} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{12}\}$ o corpo finito com 13 elementos (com soma e produto módulo 13). Determine a quantidade de matrizes A de tamanho 5×5 com entradas em $\mathbb{F}_{13}$ tais que

$$A^5 = I$$

em que I denota a matriz identidade de ordem 5.

4. Em cada item, prove ou dê contraexemplo:

(a) (5 pontos) Toda matriz real 2×2 pode ser escrita como soma dos quadrados de duas matrizes reais 2×2.

(b) (5 pontos) Toda matriz real 3×3 pode ser escrita como soma dos quadrados de duas matrizes reais 3×3.

---

5. Seja n um inteiro positivo. Numa nave espacial estão $2n$ pessoas, e quaisquer duas delas são amigas ou inimigas (a amizade/inimizade é simétrica). Dois alienígenas fazem a seguinte brincadeira: Alternadamente, cada jogador escolhe uma pessoa por vez, de modo que a pessoa escolhida a cada turno seja amiga da pessoa escolhida pelo adversário no turno anterior (no primeiro turno, o primeiro jogador pode escolher qualquer pessoa). Quem não puder mais jogar, perde (uma pessoa só pode ser escolhida uma vez). Prove que o segundo jogador possui estratégia vencedora se, e somente se, as $2n$ pessoas podem ser divididas em n pares, de modo que quaisquer duas pessoas num mesmo par sejam amigas.

---

6. Sejam $f(x) = 2x^2 + x - 1$, $f^0(x) = x$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para todo x real e $n \geq 0$ inteiro (ou seja, f^n é a n-ésima iterada de f).

(a) (2 pontos) Determine o número de soluções reais distintas da equação de $f^3(x) = x$.

(b) (8 pontos) Determine, para cada $n \geq 0$ inteiro, o número de soluções reais distintas da equação $f^n(x) = 0$.