



XXIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária 2020

1. (4 pontos) Para todo inteiro positivo n se define a_n como a média aritmética de todos os divisores positivos de n . Determine se as seguintes séries convergem ou divergem.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n a_n}$

2. (4 pontos) Sejam a, b números complexos tais que $|b| > \max\{1, |a|\}$. Prove que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{b^{m+1} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{b^{m+1} - a}.$$

3. (5 pontos) Dois elementos de \mathbb{Z}^2 se chamam *vizinhos* se distam 1 um do outro. Os elementos de \mathbb{Z}^2 são pintados de azul (e uma vez pintados permanecem pintados) por etapas da seguinte maneira:

- Na etapa 0, pinta-se $(0, 0)$.
- Na etapa $n > 0$ são pintados todos aqueles pontos que não foram pintados e que possuem exatamente um vizinho pintado após a etapa $n - 1$.

Determine todos os elementos de \mathbb{Z}^2 que não serão pintados após uma quantidade finita N de etapas, no retângulo $[-N, N] \times [-N, N]$.

4. (5 pontos) Determine se existem números complexos $z_1, z_2, \dots, z_{2020}$, todos com parte imaginária (estritamente) positiva, tais que

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_{2020})^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{2020}^2$$

5. (5 pontos) Seja x um número real. Para cada inteiro positivo n , seja A_n a matriz $n \times n$ tal que $a_{i,i} = x$, $a_{i,j} = 1$ se $|i - j| = 1$ e $a_{i,j} = 0$ se $|i - j| > 1$. Prove que se o determinante de A_n é positivo para todo inteiro positivo n , então $x \geq 2$.
6. (6 pontos) Seja p um número primo e V um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo F de característica p . Determine o maior inteiro a_n , tal que para qualquer transformação linear $T : V \rightarrow V$ com $T^p = I$, tem-se que

$$\dim(\{v \in V : Tv = v\}) \geq a_n.$$

7. (7 pontos) Encontre todas as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f^2(z) - f^2(w) = f(z+w)f(z-w),$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(*Observação:* A notação f^2 indica o quadrado da função f , quer dizer, $f^2(z) = (f(z))^2$).