



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Domingo, 11 de abril, 2021

Problema 1. O número 2021 é *fantabuloso*. Se qualquer elemento do conjunto $\{m, 2m + 1, 3m\}$ é *fantabuloso* para m inteiro positivo, então todos os elementos desse conjunto são *fantabulosos*. Com base nisso, podemos afirmar que 2021^{2021} é *fantabuloso*?

Problema 2. Encontre todas as funções $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tais que a equação

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

vale para todos x e y racionais.

Aqui, \mathbb{Q} denota o conjunto dos números racionais.

Problema 3. Seja ABC um triângulo obtuso no vértice A . Sejam E e F as intersecções da bissetriz externa do ângulo relativo ao vértice A com as alturas do ΔABC por B e C respectivamente. Sejam M e N pontos nos segmentos EC e FB , respectivamente, tais que $\angle EMA = \angle BCA$ e $\angle ANF = \angle ABC$. Prove que os pontos E, F, N, M estão em uma mesma circunferência.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Segunda-feira, 12 de abril, 2021

Problema 4. Seja ABC um triângulo com incentro I e seja D um ponto qualquer no lado BC . A reta passando por D perpendicular a BI intersecta CI em E . A reta passando por D perpendicular a CI intersecta BI em F . Prove que a reflexão de A pela reta EF está na reta BC .

Problema 5. Um plano tem um ponto especial O chamado de origem. Seja P um conjunto de 2021 pontos no plano tal que

- (i) não existem três pontos em P que sejam colineares e
- (ii) não existem dois pontos que estejam numa reta que passe pela origem.

Um triângulo com vértices em P é chamado de *gordo* se O está estritamente interno ao triângulo. Encontre o maior número de triângulos *gordos*.

Problema 6. Existe um inteiro não negativo a para o qual a equação

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

tem mais do que um milhão de soluções (m, n) diferentes com m e n inteiros positivos?

A expressão $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira (ou piso) de um número real x . Então $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ e $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos