XXVII^a OLIMPÍADA de MAIO
Primero Nível
Maio de 2021

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1

Em uma floresta, existem 5 árvores A, B, C, D, E que estão nesta ordem em uma linha reta. No ponto médio de AB há uma margarida, no ponto médio de BC há uma roseira, no ponto médio de CD há um jasmim e no ponto médio de DE há um cravo. A distância entre A e E é de 28 m; a distância entre a margarida e o cravo é de 20 m. Calcule a distância entre a roseira e o jasmim.

PROBLEMA 2

Em um tabuleiro quadriculado 2×8, você deseja colorir cada casinha de vermelho ou azul de forma que em cada subtabuleiro 2×2 haja pelo menos 3 casinhas pintadas de azul. De quantas maneiras se pode realizar esta coloração?

Observação. Um subtabuleiro 2×2 é um quadrado feito de quatro casinhas que têm um vértice comum.

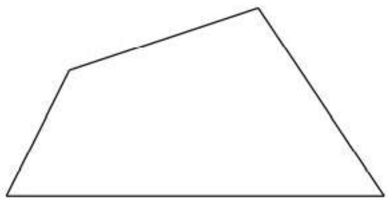
PROBLEMA 3

Qual é o número máximo de "terças-feiras 13" que pode haver em um ano com 365 dias?

Observação. Os meses de abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias cada; fevereiro tem 28 e todos os outros têm 31 dias.

PROBLEMA 4

Facundo e Luca ganharam um bolo que tem o formato do quadrilátero da figura.



Eles vão fazer dois cortes retos no bolo, obtendo assim 4 porções em forma de quadrilátero. Então o Facundo ficará com duas porções que não compartilham nenhum lado; as outras duas serão para Luca. Mostre como eles podem cortar os pedaços para que as duas crianças recebam a mesma quantidade de bolo. Justifique por que cortar desta forma se atinge o objetivo.

PROBLEMA 5

Beto escreveu 36 inteiros positivos consecutivos no quadro-negro. Calculou a soma de todos os dígitos dos 16 menores números e escreveu o resultado em azul. Em seguida ele calculou a soma de todos dígitos dos 10 maiores números e escreveu o resultado em vermelho. É possível que o número azul seja menor ou igual ao número vermelho? Se a resposta for sim, mostre quais podem ser os números que Beto escreveu; se a resposta for não, explique por que é impossível.

XXVII^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nivel
Maio de 2021

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio.

PROBLEMA 1
No quadro estão escritos os 99 números $1, 2, 3, \ldots, 98, 99$. Você tem que pintar 50 deles de modo que a soma de dois números pintados nunca seja igual a 99 ou 100. De quantas maneiras você pode fazer isso?

PROBLEMA 2
Seja N um número inteiro positivo. Um divisor de N é *próprio* se for maior que 1 e menor que N. Por exemplo, 2, 3, 6 e 9 são divisores próprios de 18. Um número inteiro positivo é *especial* se tiver pelo menos dois divisores *próprios* e for um múltiplo de todas as possíveis diferenças entre dois deles. Determine todos os inteiros positivos que são especiais.

PROBLEMA 3
Seja ABC um triângulo e D um ponto em seu interior de forma que $DBC = 60°$ e $DCB = DAB = 30°$. Se M e N são os pontos médios de AC e BC, respectivamente, demonstre que $DMN = 90°$.

PROBLEMA 4
Em cada vértice de um polígono de 13 lados, escrevemos um dos números $1, 2, 3, \ldots, 12, 13$, sem repetição. Em seguida, em cada lado do polígono, escrevemos a diferença dos números dos vértices de seus extremos (o maior menos o menor). Por exemplo, se dois vértices consecutivos do polígono têm os números 2 e 11, no lado que determinam se escreve o número 9.
a) É possível numerar os vértices do polígono de forma que em seus lados sejam escritos apenas os números 3, 4 e 5?
b) É possível numerar os vértices do polígono de forma que em seus lados sejam escritos apenas os números 3, 4 e 6?

PROBLEMA 5
Demonstre que existem 100 inteiros positivos distintos $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ tais que $\frac{n_1^3+n_2^3+\cdots+n_{100}^3}{100}$ seja um cubo perfeito.