Segunda-feira, 19 de julho de 2021

Problema 1. Seja $n \geqslant 100$ um inteiro. O Ivan escreve cada um dos números $n, n+1, \ldots, 2n$ numa carta diferente. Depois de baralhar estas $n+1$ cartas, divide-as em dois montes. Prove que pelo menos um desses montes contém duas cartas tais que a soma dos seus números é um quadrado perfeito.

Problema 2. Mostre que a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

é satisfeita por todos os números reais $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 3. Seja D um ponto interior de um triângulo acutângulo ABC, com $AB > AC$, tal que $\angle DAB = \angle CAD$. O ponto E, no segmento AC, satisfaz $\angle ADE = \angle BCD$; o ponto F, no segmento AB, satisfaz $\angle FDA = \angle DBC$ e o ponto X, na reta AC, satisfaz $CX = BX$. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ADC e EXD, respetivamente. Prove que as retas BC, EF e O_1O_2 são concorrentes.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

Terça-feira, 20 de julho de 2021

Problema 4. Sejam Γ uma circunferência com centro I e $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que cada um dos segmentos AB, BC, CD e DA é tangente a Γ. Seja Ω a circunferência circunscrita do triângulo AIC. O prolongamento de BA para além de A interseta Ω em X, e o prolongamento de BC para além de C interseta Ω em Z. Os prolongamentos de AD e CD para além de D intersetam Ω em Y e T, respetivamente. Prove que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problema 5. Dois esquilos, Bushy e Jumpy, recolheram 2021 nozes para o inverno. O Jumpy numera as nozes desde 1 até 2021 e escava 2021 pequenos buracos no chão numa disposição circular à volta da sua árvore favorita. Na manhã seguinte, o Jumpy observa que o Bushy colocou uma noz em cada buraco, mas sem ter em conta a numeração. Não contente com isto, o Jumpy decide reordenar as nozes realizando uma sequência de 2021 movimentos. No k-ésimo movimento o Jumpy troca as posições das duas nozes adjacentes à noz com o número k. Prove que existe um valor de k tal que, no k-ésimo movimento, as nozes trocadas têm números a e b tais que $a < k < b$.

Problema 6. Sejam $m \geqslant 2$ um inteiro, A um conjunto finito de inteiros (não necessariamente positivos) e $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ subconjuntos de A. Suponhamos que, para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, a soma dos elementos de B_k é m^k. Prove que A contém pelo menos $m/2$ elementos.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.