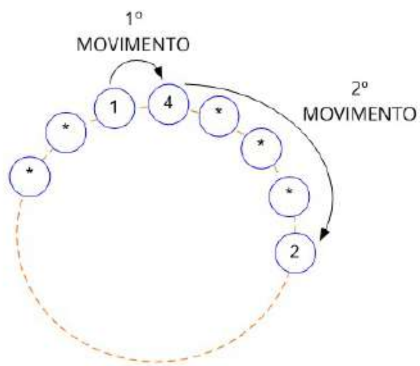
4 de outubro de 2021

1. São dadas $n \geq 2$ fichas, numeradas de 1 a n. As fichas são colocadas em um círculo, não necessariamente em ordem. Inicia-se com a ficha de número 1. A cada turno, se estamos na ficha de número i, pulamos para a ficha que está i posições à frente em sentido horário. Por exemplo, observe a seguinte figura:



Determine todos os valores de n para os quais é possível ordenar as fichas no círculo, de modo que todas serão visitadas durante o processo.

2. Considere o triângulo isósceles ABC com $\angle BAC = 90°$. Seja ℓ a reta que passa pelo ponto B e pelo ponto médio de AC. Seja Γ a circunferência de diâmetro AB. A reta ℓ e a circunferência Γ se intersectam no ponto P, diferente de B. Mostre que a circunferência que passa pelos pontos A, C e P é tangente à reta BC em C.

3. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que a igualdade:

$$f(x + yf(x + y)) + xf(x) = f(xf(x + y + 1)) + y^2$$

é satisfeita para todos os números reais x, y.

Nota: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma associação tal que cada número real z é associado a um único número real, denotado por $f(z)$. Por exemplo, $f(z) = z^2+1$ é uma função que associa 1 a $f(1) = 1^2+1 = 2$, e associa -2 a $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até 23:59 UTC.

PAGMO 2021

1st Pan-American Girls' Mathematical Olympiad

5 de outubro de 2021

Problema 4. Lúcia multiplica vários números positivos de um dígito (possivelmente com repetições) e obtém um inteiro n que é maior do que 10. Em seguida, ela multiplica todos os dígitos de n, obtendo um número ímpar. Determine todos os valores possíveis do dígito das unidades de n.

Observação: O dígito das unidades de um número é o dígito ques está mais à direita. Por exemplo, o dígito das unidades de 2021 é 1.

Problema 5. Celeste tem um número ilimitado de cada um dos n tipos diferentes de doces, rotulados de tipo 1, tipo 2, ... , tipo n. Inicialmente, ela toma $m > 0$ doces e os enfilera em uma mesa. Então, ela repetidamente escolhe uma das seguintes operações e a executa (nem sempre ela tem as duas opções):

1. Ela come um doce do tipo k e, no lugar dele, ela coloca dois doces: um doce do tipo $k-1$ seguido de um doce do tipo $k+1$. Considere o tipo $n+1$ como o mesmo que o tipo 1 e o tipo 0 como o mesmo que o tipo n.

2. Ela escolhe dois doces do mesmo tipo que estão em posições consecutivas e os come.

Determine todos os inteiros positivos n para os quais Celeste consegue deixar a mesa vazia (nenhum doce na mesa) depois de realizar uma quantidade finita das duas operações acima, independente do valor de m e da configuração inicial de doces na mesa.

Problema 6. Seja ABC um triângulo com incentro I e seja Γ o excírculo oposto ao vértice A. Suponha que Γ é tangente às retas BC, AC e AB nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Suponha que as retas IA_1, IB_1 e IC_1 intersectam Γ novamente nos pontos A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Seja M o ponto médio do segmento AA_1. Se as retas A_1B_1 e A_2B_2 se intersectam em X e as retas A_1C_1 e A_2C_2 se intersectam em Y, demonstre que $MX = MY$.

Notas:

- *O incentro do triângulo* ABC é o centro da circunferência que é tangente aos segmentos AB, AC e BC.

- *O excírculo do triângulo* ABC *oposto ao vértice* A é a circunferência que é tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB mais distante de B, e ao prolongamento do segmento AC mais distante de C.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até 23:59 UTC.