Primeiro dia

26 de outubro de 2021

Problema 1. Para cada $0 < \alpha < 1$, seja $R(\alpha)$ a região em $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é o pentágono convexo de vértices $(0, 1-\alpha)$, $(\alpha, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$. Seja R o conjunto dos pontos que pertencem simultaneamente a cada uma das regiões $R(\alpha)$ com $0 < \alpha < 1$, isto é, $R = \bigcap_{0<\alpha<1} R(\alpha)$.

Determine a área de R.

Problema 2. Sejam $r > s$ inteiros positivos. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios distintos, não constantes com coeficientes reais, tais que

$$P(x)^r - P(x)^s = Q(x)^r - Q(x)^s \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstre que $r = 2$ e $s = 1$.

Problema 3. Sejam m, n e N inteiros positivos e seja $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ o conjunto de restos módulo N. Considere um tabuleiro de tamanho $m \times n$ onde cada uma de suas mn casas contêm um elemento de $\mathbb{Z}_N$. Uma *transição* consiste em escolher um elemento $g \in \mathbb{Z}_N$, uma casa do tabuleiro e somar g aos elementos localizados nas $m + n - 1$ casas que pertencem a mesma fila e coluna que a casa escolhida, onde a soma se dá módulo N.

Demonstre que se N é coprimo com $m-1$, $n-1$ e $m+n-1$, então qualquer configuração inicial dos elementos nas casas do tabuleiro pode ser transformada em qualquer outra configuração usando uma quantidade finita de transições.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

27 de outubro de 2021

Problema 4. Seja $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos.

a) Demonstre que existe uma única função estritamente crescente $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tal que

$$f(f(n)) = 2n + 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Para a função do item *a*), demonstre que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\frac{4n+1}{3} \leq f(n) \leq \frac{3n+1}{2}.$$

c) Demonstre que em cada uma das desigualdades do item *b*) vale a igualdade para infinitos inteiros positivos n.

Problema 5. Para todo inteiro positivo n, seja $s(n)$ a soma dos expoentes de 71 e 97 na fatoração prima de n; por exemplo, $s(2021) = s(43 \cdot 47) = 0$ e $s(488977) = s(71^2 \cdot 97) = 3$. Se definimos $f(n) = (-1)^{s(n)}$, demonstre que o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

existe e determine seu valor.

Problema 6. Sejam $0 \leq a < b$ números reais. Demonstre que não existe nenhuma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b f(x)x^{2n}\,dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)x^{2n+1}\,dx < 0,$$

para todo inteiro $n \geq 0$.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.