XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primeiro dia

19 de outubro de 2021

Problema 1. Seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ um conjunto de 10 primos distintos e seja A o conjunto de todos os inteiros maiores que 1 tais que em sua descomposição em fatores primos aparecem apenas primos de P. Os elementos de A são coloridos de tal forma que:

a) cada elemento de P tem uma cor distinta,

b) se $m, n \in A$, então mn tem a mesma cor que m ou n,

c) para qualquer par de cores distintas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, não existem $j, k, m, n \in A$ (não necessariamente distintos), com j, k da cor $\mathcal{R}$ e m, n da cor $\mathcal{S}$, tais que j divide m e n divide k.

Prove que existe um primo de P tal que todos os seus múltiplos em A têm a mesma cor.

Problema 2. Considere um triângulo acutângulo ABC, com $AC > AB$, e seja Γ sua circunferência circunscrita. Sejam E e F os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente. A circunferência circunscrita do triângulo CEF e Γ se intersectam em X e C, com $X \neq C$. A reta BX e a tangente a Γ por A se intersectam em Y. Seja P o ponto no segmento AB tal que $YP = YA$, com $P \neq A$, e seja Q o ponto onde se intersectam AB e a paralela a BC que passa por Y. Prove que F é o ponto médio de PQ.

Nota: A circunferência circunscrita de um triângulo é a circunferência que passa pelos seus três vértices.

Problema 3. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos e seja $b_1, b_2, b_3, \ldots$ a sequência infinita de números reais dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Prove que se em cada um milhão de termos consecutivos da sequência $b_1, b_2, b_3, \ldots$ existe pelo menos um que é inteiro, então existe algum k tal que $b_k > 2021^{2021}$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Segundo dia

20 de outubro de 2021

Problema 4. Sejam a, b, c, x, y, z números reais tais que

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 = (a + b)^2 + (x + y)^2 = (b + c)^2 + (y + z)^2 = (c + a)^2 + (z + x)^2.$$

Prove que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 5. Para um conjunto finito C de inteiros, define-se $S(C)$ como a soma dos elementos de C. Encontre dois conjuntos não vazios A e B cuja interseção é vazia, cuja união é o conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e tais que o produto $S(A)S(B)$ é um quadrado perfeito.

Problema 6. Considere um polígono regular de n lados, $n \geq 4$, e seja V um subconjunto de r vértices do polígono. Prove que se $r(r - 3) \geq n$, então existem pelo menos dois triângulos congruentes cujos vértices pertencem a V.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos