Complex bash

Gabriel Ribeiro Paiva
gabrielpaiva2002@gmail.com

Definições

O conjunto dos complexos ($\mathbb{C}$)

Definimos um número complexo como $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ é uma constante imaginária. Dizemos que a é a parte real de z, e b é a sua parte imaginária (bem intuitivo, não?). Além disso, definimos o conjungado de um complexo z como $\overline{z} = a - bi$.

Tendo definido esse conjunto, podemos definir operações com seus elementos:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- $(a + bi) \div (c + di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ para $c + di \neq 0$.

Veja que essa definição é bem intuitiva, uma vez que as operações são definidas de forma análoga às dos números reais.

Propriedades do conjugado

Podemos verificar ainda que, para números complexos z_1 e z_2, temos

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ para $z_2 \neq 0$.

Ou seja, o conjugado é ”distribuído” nas expressões aritméticas dos números complexos.

Por mais que isso pareça muito interessante, ainda não vimos muita utilidade para o conjugado, mas ele será muito útil no futuro.

Usando complexos na geometria euclidiana

Agora que definimos um número complexo, qual a relação que ele tem com a geometria à qual estamos acostumados? Bem, cada número complexo é formado por dois reais (sua parte real e parte imaginária) e cada ponto também é representado por dois números reais. Daí, podemos representar um ponto (x, y) com o complexo $x + yi$. Também faz sentido renomear os eixos x e y como eixos real e imaginário, respectivamente, pois eles representam a parte real e imaginária do complexo.

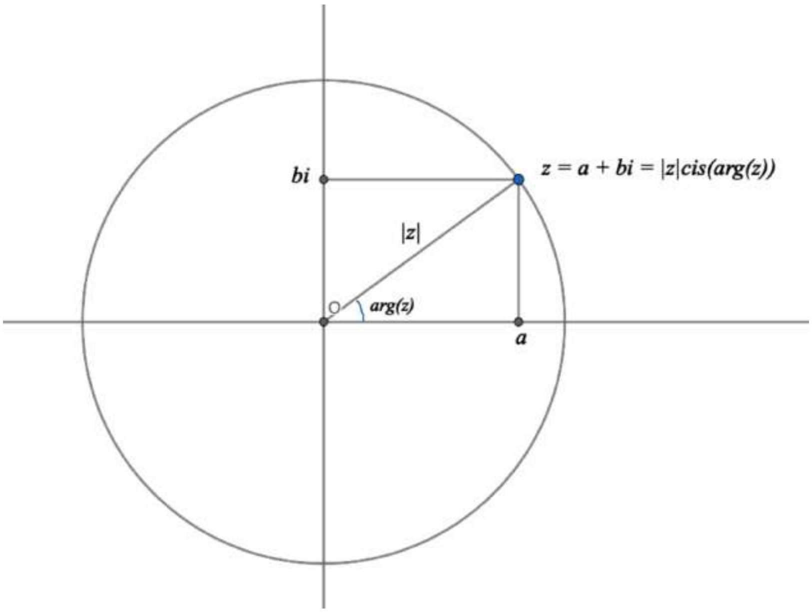
Além disso, a distância de um ponto (x, y) para a origem é dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Representando o ponto como o complexo $z = x + yi$, temos que a distância para a origem é $\sqrt{z \cdot \overline{z}}$ e daí podemos definir $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Com isso, fica claro que a distância de dois pontos representados pelos complexos z_1 e z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$, uma vez que subtrair dois complexos é apenas fazer uma translação de um ponto pelo vetor definido pelo outro.

Veja ainda que essa função satisfaz $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$.

Forma polar de um número complexo

Tomando as coordenadas polares como motivação, faz sentido que também possamos representar um número complexo a partir de um ângulo e de sua distância para a origem. Seja θ o ângulo que um complexo z forma com o eixo real, esse ângulo é definido como $\arg z$. É fácil ver que z pode ser escrito como $|z| \cdot \operatorname{cis} \theta$, onde *cis* é uma função definida por $\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta$. Veja a imagem abaixo:



Representação de um número complexo no plano cartesiano.

Além disso, a função *cis* satisfaz $\operatorname{cis} \theta_1 \cdot \operatorname{cis} \theta_2 = \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$, ou seja, multiplicar um complexo por $\operatorname{cis} \theta$ para algum ângulo θ realiza uma rotação de ângulo θ.

A partir dessa observação, concluímos que multiplicar dois complexos é a mesma coisa que fazer uma rotação e depois uma homotetia ("esticar" e "rodar" o complexo a partir da origem), pois

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \operatorname{cis}(\arg z_1) \cdot \operatorname{cis}(\arg z_2)$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| \cdot \operatorname{cis}(\arg z_1 + \arg z_2)$$

Daí, multiplicar (consequentemente, dividir) complexos na forma polar é bem simples.

Círculo unitário

Complexos no círculo unitário ficam bem simples, pois $a \cdot \overline{a} = |a|^2 \Rightarrow \overline{a} = \frac{1}{a}$, o que facilita muitas contas. Veremos melhor quando formos provar as fórmulas mais comuns.

Notação de complexos na geometria

No começo de cada problema que fizer com complexos, defina uma circunferência para ser seu círculo unitário. A notação usual para o complexo que representa o ponto P é p.

Colinha das fórmulas

Aqui estão as fórmulas mais usadas quando tentamos resolver um problema por complexos:

Gerais

1. $AB \parallel CD \iff \frac{a-b}{\overline{a-b}} = \frac{c-d}{\overline{c-d}}$.
2. A, B, C são colineares $\iff \frac{a-b}{\overline{a-b}} = \frac{a-c}{\overline{a-c}}$ (veja que essa fórmula é igual à anterior quando trocamos D por A). Na forma de determinante, podemos escrever

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. $[ABC] = \frac{1}{4i} \cdot \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$ (Veja que isso também prova a colinearidade do item anterior).
4. $AB \perp CD \iff \frac{a-b}{\overline{a-b}} = -\frac{c-d}{\overline{c-d}}$.
5. $\angle ABC = \angle XYZ \iff \frac{a-b}{c-b} \div \frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$ (Ângulos orientados).
6. Um quadrilátero (não necessariamente convexo) $ABCD$ é cíclico $\iff \frac{a-b}{d-b} \div \frac{a-c}{d-c} \in \mathbb{R}$ (Basta usar o item anterior).
7. $\triangle ABC \sim \triangle XYZ \iff \frac{a-b}{c-b} = \frac{x-y}{z-y}$ (Com essa orientação).

Usando o círculo unitário

Para essa sessão tome A, B, C, D pontos no círculo unitário e Z um ponto qualquer no plano.

1. $\frac{a-b}{\overline{a-b}} = -ab$.
2. $Z \in AB \iff z = a + b - ab\overline{z}$. Colocando $b = a$, temos que Z está ma tangente pelo ponto A ao círculo unitário $\iff z = 2a - a^2\overline{z}$.
3. A projeção de Z em AB é $\frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.
4. $AB \cap CD = \frac{ab(\overline{c+d})-cd(\overline{a+b})}{\overline{ab-cd}}$. E daí concluímos que a tangente por A e B ao círculo unitário se intersectam em $\frac{2ab}{a+b}$.

Pontos notáveis

1. Sendo H, O, G e N o ortocentro, circuncentro, baricentro e centro do círculo dos nove pontos de um triângulo ABC, temos:

   - $h = a + b + c - 2o$.
   - $n = \frac{h+o}{2} = \frac{a+b+c-o}{2}$.

- $g = \frac{a+b+c}{3}$.
- $o = \begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}$.
- Se ABC é isósceles em B, temos que $o = b + \frac{(a-b)(c-b)}{a+c-2b}$.
- Se ABC está inscrito no círculo unitário, temos que $h = a + b + c$ e $n = \frac{a+b+c}{2}$.

2. Se ABC está inscrito no círculo unitário, existem complexos u, v, w, tais que
   - $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$.
   - O ponto médio do arco AB que não contém C é $-uv$ e vale uma relação análoga para os pontos médios dos arcos menores BC e AC.
   - O incentro I de ABC é $-(uv + uw + vw)$.
   - O ex-incentro relativo a A de ABC é $uv + uw - vw$. Vale uma relação análoga para os outros ex-incentros.

Muitos alunos cometem o erro de achar que precisam decorar todas essas fórmulas para ficarem bons em revolver problemas de geomtria com complexos, mas isso é o menos importante. Se a teoria for bem absorvida, não importa se você esquecer alguma dessas formas, pois pode prová-las no meio da prova (quem sabe faz ao vivo, certo?).

Além disso, as fórmulas vão sendo fixadas na cabeça aos poucos, com bastante prática. Pensando nisso, pratiquemos na próxima sessão.

Colocando a mão na massa

Comece a treinar provando as fórmulas dadas na sessão anterior. Depois podemos ir para os problemas.

Problemas

Problema 1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo escaleno, e seja N o centro da circunferência que passa pelos pés das alturas. Seja D a intersecção das tangentes da circunferência do triângulo ABC em B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se $\measuredangle BAC = 45°$.

Problema 2. Seja H o ortocentro e G o baricentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. A reta AG intersecta o circuncírculo de ABC em A e P. Seja P' o reflexo de P pela reta BC. Prove que $\angle CAB = 60$ se, e somente se $HG = GP'$.

Problema 3. No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz externa de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C analogamente. Sejam H e I o ortocentro e incentro do triângulo ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definem um triângulo. Prove que o circumcentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

Problema 4. ABC é um triângulo não-isósceles.

T_A é o ponto de tangência do incírculo do ABC com o lado BC (defina T_B,T_C analogamente).

I_A é o ex-incentro relativo ao lado BC (defina I_B,I_C analogamente).

X_A é o ponto médio de I_BI_C (defina X_B,X_C analogamente).

Mostre que X_AT_A,X_BT_B,X_CT_C são concorrentes em um ponto colinear com o incentro e o circuncentro do ABC.

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo sem dois lados com o mesmo tamanho. A reflexão do baricentro G e do circuncentro O do ABC pelos lados BC, CA, AB são G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos triângulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC têm um ponto em comum.

Problema 6. Seja ABC um triângulo. O incírculo de ABC toca os lados AB e AC nos pontos Z e Y, respectivamente. Seja G o ponto em que as retas BY e CZ se encontram e sejam R e S pontos, tais que os quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ sejam paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Desafios

Problema 1. Dado um quadrilátero cíclico $ABCD$, as diagonais AC e BD se encontram em E e as retas AD e BC se encontram em F. Os pontos médios de AB e CD são G e H, respectivamente. Mostre que EF é tangente à circunferência que passa pelos pontos E, G e H.

Problema 2. Seja ABC um triângulo com circuncírculo Ω e incentro I. A reta ℓ intersecta as retas AI, BI e CI nos pontos D, E e F, respectivamente, distintos dos pontos A, B, C e I. As mediatrizes x, y e z dos segmentos AD, BE e CF, respectivamente, determinam um triângulo Θ. Mostre que o circuncírculo de Θ é tangente a Ω.

Problema 3. Sejam O o circuncentro e Ω o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Seja P um ponto arbitrário em Ω, diferente de A, B, C, e de suas antípodas em Ω. Chame os circuncentros dos triângulos AOP, BOP, e COP de O_A, O_B, e O_C, respectivamente. As retas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C são perpendiculares a BC, CA, e AB, passando por O_A, O_B, e O_C, respectivamente. Prove que o circuncírculo do triângulo formado pelas retas ℓ_A, ℓ_B e ℓ_C é tangente à reta OP.

Referência

Para maior aprofundamento no assunto, recomendo ler e resolver os problemas do capítulo de complexos, do livro EGMO, de Evan Chen.