Introdução a equações funcionais

Gabriel Ribeiro Paiva
gabrielpaiva2002@gmail.com

Definições

Muitos estudantes sentem dificuldade em pensar em problemas que envolvem funções. Sinto que existem 2 principais causas para isso:

1. O problema dá uma grande quantidade de informação e é difícil de se organizar e juntar todos esses fatos para solucioná-lo.
2. Não conseguir entender o que as informações adquiridas dizem sobre a função.

O objetivo dessas aulas é aprender a lidar com esses problemas. Mas, afinal, o que é uma função? Apresento uma definição a seguir.

Definição (Função). Dados dois conjuntos $\mathbb{D}$ e $\mathbb{CD}$ que chamamos de domínio e contradomínio, respectivamente, e uma relação que leva cada elemento $\mathtt{d} \in \mathbb{D}$ em um único elemento $\mathtt{c} \in \mathbb{CD}$, definimos uma função $\mathtt{f}$ como sendo essa relação. Além disso, definimos $\mathtt{f}(\mathtt{d})$ como o único elemento em $\mathbb{CD}$ que está relacionado com $\mathtt{d}$.

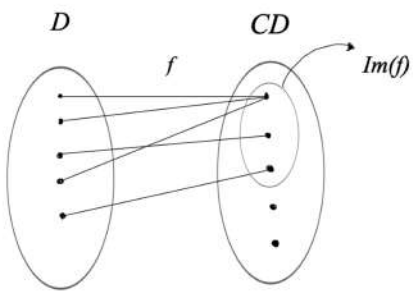
Como escrever tudo do parágrafo acima é muito demorado (talvez nem tanto, mas muitas vezes a preguiça fala mais alto :)), podemos definir a função escrevendo $\mathtt{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{CD}$, onde $\mathbb{D}$ é seu domínio e $\mathbb{CD}$ a imagem.

Por exemplo, existe uma função que leva cada pessoa no seu aniversário. Nesse caso, $\mathbb{D}$ é o conjunto das pessoas e $\mathbb{CD}$ é o conjunto de datas em um ano. Veja que essa relação é uma função, pois cada pessoa possui um único aniversário. Veja também que podem existir várias pessoas com o mesmo aniversário e não há problema com isso.

Além disso, é natural que definamos a imagem de $\mathtt{f}$ ($\mathtt{Im}(\mathtt{f})$) como o conjunto dos elementos do contradomínio que foram relacionados com algum elemento do domínio, ou seja:

$$\mathtt{Im}(\mathtt{f}) = \{\mathtt{f}(\mathtt{d}) \, \forall \, \mathtt{d} \in \mathtt{D}\}$$

É comum que representemos uma função como um diagrama de setinhas que fazem cada elemento do domínio apontar para um elemento da imagem, como a seguir:



Há também alguns tipos de funções bem comuns que são muito úteis na hora de resolver um problema:

Definição (Função Injetora). Dizemos que uma função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{CD}$ é injetora quando $f(d_1) = f(d_2) \Rightarrow d_1 = d_2 \,\forall\, d_1, d_2 \in \mathbb{D}$.

Ou seja, cada elemento do contradomínio é imagem de no máximo um elemento do domínio.

Também podemos definir injetividade em um único elemento c da imagem. Dizemos que f é injetora em $c \iff$ existe um único d no domínio tal que $f(d) = c$.

Definição (Função Sobrejetora). Dizemos que uma função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{CD}$ é sobrejetora quando $\text{Im}(f) = \mathbb{CD}$.

Ou seja, $\forall\, c \in \mathbb{CD} \,\exists\, d \in \mathbb{D}$ tal que $f(d) = c$.

Definição (Função Bijetora). Dizemos que uma função é bijetora quando ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Equações funcionais

Ok, sabemos o que é uma função e até alguns tipos de funções, mas como resolver uma equação funcional? Afinal, não há operações que possamos fazer com uma função, já que ela não tem nenhuma operação definida.

Felizmente, podemos aplicar uma função em conjuntos que tenham operações e fazer uma equação para cada uma dessas aplicações (ufa, ainda bem :)).

Por exemplo, o problema a seguir...

Problema (Cauchy nos racionais). Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tais que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \,\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$$

...nos dá as equações $f(1) + f(0) = f(0)$, $f(3) + f(4) = f(7)$, $f(2) + f(-1) = f(1)$, $\ldots$ e mais uma infinidade de outras equações.

Como o maior desafio dos problemas de equação funcional é achar as equações certas e tirar conclusões a partir delas, aqui estão algumas dicas para encontrar boas equações a partir de uma equação funcional:

- Tentar achar uma solução e fazer substituições pensando nela.
- Substituir as variáveis por 0.
- Provar injetividade e/ou sobretividade.
- Igualar valores ”dentro” do f para que cortem.
- Tentar provar injetividade em algum valor (normalmente 0).
- Achar alguns valores de f, como $f(0)$, $f(1)$, etc.
- Tentar achar algum x tal que $f(x) = 0$, ou algum valor que pareça útil.
- Provar que a função satisfaz a equação de Cauchy.
- Achar mais informações sobre a função, como limitada e/ou monótona em algum intervalo.
- Aplicar indução quando o domínio é inteiro ou racional.
- Explorar simetria.

Colocando a mão na massa.

Para se acostumar

Problema 1. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$2f(x) + f(1-x) = 1 + x$$

para todos os x, y reais.

Problema 2. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, tais que

$$2xf(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

para todo real não nulo x.

Problema 3. Resolva o problema apresentado na sessão anterior (equação funcional de cauchy).

Problema 4. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$f(x \cdot f(y)) = f(xy) + x \, \forall \, x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 5. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tais que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \, \forall \, x, y \in \mathbb{Q}$$

Problema 6. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \, \forall \, x, y \in \mathbb{R}$$

Problemas

Problema 1. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tais que para todos os inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 2. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

para todos os reais x, y.

Problema 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$f(x + yf(x+y)) + xf(x) = f(xf(x+y+1)) + y^2 \, \forall \, x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona tal que f satisfaz a equação funcional de Cauchy. Prove que $f(x) = xc \, \forall \, x \in \mathbb{R}$ para algum c constante real.

Problema 5. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(y) = f(x+y)$ e $f(x^{2013}) = f(x)^{2013}$.

Desafios

Problema 1. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos os reais x, y.

Problema 2. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2 \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}$$

Problema 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que, para todos os reais x e y,

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$