Reaprendendo a contar

Semana Olímpica, 2021 – Nível 1

George Lucas

Quando somos crianças costumamos ver contagem em diversos lugares. Entre os exemplos da infância citamos jogos tipo Esconde-Esconde ou 7 pecados, onde as boladas ficam presas na nossa mente pra sempre, também em músicas sobre indiozinhos no pequeno bote, até atualmente em memes Batatinha-Frita 1,2,3... Enfim, contar era muito divertido (e ainda é!) Mas e se precisarmos contar números grandes? Talvez contar no braço ou listar um a um não seja o mais viável. Vejamos algumas idéias e truques (menos braçais) para fazermos isso.

Princípio da Adição ("ou"): Suponha que possuamos um saco com C chaves e outro saco com M maçanetas. Então ao juntarmos tudo em um saco só, teremos $C+M$ objetos (chaves OU maçanetas).

Princípio da Multiplicação ("e"): E se ao invés de juntarmos tudo num saco só, resolvermos contar a quantidade de pares formados por uma chave E uma maçaneta? Bem, existem $C \times M$ de tais pares! Afinal, para cada escolha de chave, existem M possibilidade de maçanetas e portanto teremos $\underbrace{M+M+M+\cdots+M}_{C\ parcelas} = C \times M$ pares.

Permutações

Permutar é simplesmente ordenar. Suponha que tenhamos uma mesa com n objetos distintos e decidimos colocá-los em ordem. De quantas maneiras então podemos ordená-los?

Ora, o objeto da primeira posição pode ser escolhido de n maneiras;

Escolhido o primeiro objeto, o segundo pode ser escolhido de $(n-1)$ maneiras;

Escolhido os dois primeiros, o terceiro pode ser escolhido de $(n-2)$ maneiras;

E assim sucessivamente;

O último objeto da fila entretanto só pode ser escolhido de uma única maneira (afinal só sobrou um objeto).

Portanto, o número de ordenações possíveis que podemos criar escolhendo o objeto da primeira posição E da segunda posição E... E da última posição é, pelo princípio multiplicativo,

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Temos uma notação pra isso: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ é o produto dos n primeiros inteiros positivos.

Portanto, existem $n!$ permutações de n objetos.

Observação: Se $n = 0$ temos apenas a ordenação vazia, então adotamos $0! = 1$.

Arranjos

Vejamos agora uma situação diferente: Temos n objetos distintos e queremos ordenar apenas p deles, descartando os demais $n - p$ ($0 \leq p \leq n$). De quantas maneiras podemos fazer isso?

Isso se trata de um arranjo de n objetos p a p. A ideia é essencialmente a mesma!

Ora, o objeto da primeira posição pode ser escolhido de n maneiras;

Escolhido o primeiro objeto, o segundo pode ser escolhido de $(n - 1)$ maneiras;

Escolhido os dois primeiros, o terceiro pode ser escolhido de $(n - 2)$ maneiras;

E assim sucessivamente;

O p-ésimo objeto da fila pode ser escolhido de $(n - (p - 1))$ maneiras.

Portanto, o número de ordenações possíveis que podemos criar escolhendo o objeto da primeira posição E da segunda posição E... E da p-ésima posição é, pelo princípio multiplicativo,

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)\ldots 1}{(n-p)\ldots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Temos uma notação pra isso: $\mathbf{A_n^p} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-p)!}}$

Portanto, existem A_n^p arranjos de n objetos p a p.

Um fato interessante é que se $p = n$ isso se trata exatamente do número de permutações de n objetos, enquanto que $p = 0$ temos apenas o arranjo vazio.

Combinações

Agora uma nova situação: Temos n objetos distintos e queremos escolher p deles ($0 \leq p \leq n$) sem precisar ordená-los. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Isso se trata de uma combinação de n objetos p a p.

Ora, se pudéssemos ordená-los, estaríamos falando de um arranjo e teríamos A_n^p de tais arranjos. Além disso, quando temos p objetos escolhidos eles podem se ordenar entre si de $p!$ maneiras, isto é, dentre as A_n^p ordenações, cada conjunto de p objetos é contado em $p!$ ordenações.

Portanto, o número de combinações de n objetos p a p é $\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

Temos duas notações para isso: $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Mais frequentemente usaremos a notação $\binom{n}{p}$ para tal quantidade (Lê-se "n escolhe p")

Exercício: Forneça um argumento combinatórico que prove que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Permutações com Repetição

Quem nunca quando criança brincou de escrever seu nome de traz pra frente ou simplesmente embaralhar as letras e gerar um nome engraçado ou sem sentido algum? Tais palavras geradas a partir de outra através de uma reordenação (ou permutação) das letras tem um nome: Anagrama! Calcular a quantidade de anagramas de uma palavra cujas letras são todas distintas é bem simples. A palavra LUZ possui $3! = 6$ anagramas: LUZ, LZU,ULZ,UZL,ZLU,ZUL, enquanto que a palavra $AMOR$ possui $4! = 24$ anagramas, e a palavra AVESTRUZ? Adivinha só: $8! = 40320$ anagramas, enquanto que a palavra EU apenas 2 anagramas: EU e UE.

Mas e a palavra ANA? Apesar de ANA ter 3 letras, ele não possui $3! = 6$ permutações, na verdade existem apenas 3 permutações: AAN,ANA,NAA. Isso se dá devido a repetição da letra A na palavra. Aí fica a pergunta: Se há letras repetidas na palavra, como calculamos o número de permutações?

Considere uma mesa cheia de objetos, sendo que há a_1 objetos do tipo 1 (exatamente iguais), a_2 objetos do tipo 2 (exatamente iguais), ..., a_k objetos do tipo k (exatamente iguais). Possuindo um total de $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ objetos sobre a mesa. De quantas maneiras podemos permutar esses n objetos?

A ideia aqui é um bastante diferente da permutação com elementos distintos.

Bem, temos n posições em fila em que pretendemos colocar esses n objetos.

Inicialmente das n posições escolha a_1 delas para encaixar os objetos do tipo 1, temos $\binom{n}{a_1}$ maneiras de realizar tal escolha;

Após colocarmos os objetos do tipo 1 na fila, sobram $n - a_1$ posições, onde escolheremos a_2 delas para posicionar os objetos do tipo 2, temos então $\binom{n-a_1}{a_2}$ maneiras de escolher essas posições;

Após colocarmos os objetos dos tipos 1 e 2 na fila, sobram $n - a_1 - a_2$ posições, onde escolheremos a_3 delas para posicionar os objetos do tipo 3, temos então $\binom{n-a_1-a_2}{a_3}$ maneiras de escolher essas posições;

E assim sucessivamente;

Após colocarmos os objetos do tipo 1,2,...,(k-1) na fila, sobram $n - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1}$ posições, onde escolheremos a_k delas para posicionar os objetos do tipo k (de fato as posições escolhidas devem ser as restantes pois $n - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1} = a_k$), temos então $\binom{n-a_1-\cdots a_{k-1}}{a_k}$ maneiras de escolher essas posições.

Finalmente, pelo princípio Multiplicativo, o número de tais permutações é

$$\binom{n}{a_1} \times \binom{n-a_1}{a_2} \times \binom{n-a_1-a_2}{a_3} \times \ldots \times \binom{n-a_1-\cdots a_{k-1}}{a_k} =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\,(n-a_1)!} \frac{(n-a_1)!}{a_2!\,(n-a_1-a_2)!} \frac{(n-a_1-a_2)!}{a_3!\,(n-a_1-a_2-a_3)!} \cdots \frac{(n-a_1-\cdots a_{k-1})!}{a_k!\,(n-a_1-\cdots a_{k-1}-a_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\,a_2!\ldots a_k!\,(n-a_1-\cdots a_{k-1}-a_k)!}$$

Como $n - a_1 - \cdots a_{k-1} - a_k = 0$ **segue que o número de permutações é simplesmente**

$$\boldsymbol{\frac{n!}{a_1!\,a_2!\ldots a_k!}}$$

Notação: $\boldsymbol{\binom{n}{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}}$**, onde** $\boldsymbol{n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k}$

Podemos também escrever $\binom{n}{p} = \binom{n}{p,n-p}$

Assim, o número de anagramas da palavra ANA é $\binom{3}{1,2} = \frac{3!}{1!2!} = 3$. O número de anagramas da palavra MATEMATICA é $\binom{10}{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$.

Combinações completas

Suponha que na mesa agora tenhamos k tipos diferentes de objetos (objetos do mesmo tipo são completamente iguais), com cada tipo aparecendo uma infinidade de vezes. Queremos então escolher n objetos, sem ordená-los, dentre os que estão na mesa. De quantas maneiras podemos fazer isso?

Ora, se na nossa escolha existem x_j objetos dos tipo j então temos $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. E de fato, dados os x_j's satisfazendo a igualdade acima existe uma única escolha dos n objetos.

Assim, o problema é equivalente a acharmos a quantidade de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Mostremos indutivamente que a quantidade de soluções da equação acima é $\binom{n+k-1}{n}$.

O caso $n = 1$ é de imediato, afinal se $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$, uma dentre as parcelas é 1 e as demais são 0. Assim basta escolhermos a parcela que será 1: temos k maneiras de escolher e portanto $k = \binom{1+k-1}{1}$ soluções.

Agora fixe $n = n_0$ e por indução forte suponha que para $n < n_0$ a quantidade de soluções de $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ seja $\binom{n+k-1}{n}$.

Agora façamos indução em k com n_0 fixo.

O caso base $k = 1$ nos dá uma única solução $a_1 = n_0$. E de fato $1 = \binom{n_0+1-1}{n_0}$.

Por hipótese suponha que para um dado k_0 a quantidade de soluções de

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0} = n_0$ seja $\binom{n_0+k_0-1}{n_0}$.

Vejamos agora a expressão $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0} + x_{k_0+1} = n_0$.

Ora, se $x_{k_0+1} = 0$ temos então $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0} = n_0$ o que por hipótese nos dá $\binom{n_0+k_0-1}{n_0}$ soluções.

Se $x_{k_0+1} \geq 1$ defina então $y = x_{k_0+1} - 1$ e obtemos a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0} + y = n_0 - 1$$

Pela nossa indução forte, tal equação possui $\binom{(n_0-1)+(k_0+1)-1}{n_0-1}$.

Logo, pelo princípio da adição, o número de soluções de $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_0} + x_{k_0+1} = n_0$ é

$$\binom{n_0 + k_0 - 1}{n_0} + \binom{n_0 + k_0 - 1}{n_0 - 1} = \binom{n_0 + k_0}{n_0} = \binom{n_0 + (k_0 + 1) - 1}{n_0}$$

Completando assim nossa indução.

Logo o número de maneiras de realizarmos tais escolhas de objetos é $\binom{n+k-1}{n}$.

A igualdade da última linha segue pela Relação de Stifel que colocaremos como exercício abaixo. Encorajamos o leitor a dar uma prova algébrica e uma prova utilizando um argumento combinatórico para tal relação.

Exercício (Relação de Stifel): Prove que para $0 \leq p < n$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Recorrências

Anteriormente realizamos uma indução para provarmos a fórmula das combinações completas. Uma ideia bem semelhante aparece nas recorrências. A ideia aqui é: Você tem uma sequência de números em que cada termo depende dos termos anteriores. Exemplos:

$a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 1$ para $n \geq 1$;

$b_0 = 3$ e $b_{n+1} = 2b_n$ para $n \geq 0$;

$c_0 = 2, c_1 = 3$ e $c_{n+1} = 3c_n - 2c_{n-1}$ para $n \geq 1$.

Resolvendo-as, em sua forma fechada, obtemos $a_n = n$; $b_n = 3 \times 2^n$; $c_n = 2^n + 1$

(Encorajamos o leitor a provar isso por indução).

Entretanto, podemos também nos deparar com recorrências de fórmulas fechadas bem feinhas...

Um exemplo clássico é a sequência de Fibonacci, onde $F_1 = F_2 = 1$ e para $n \geq 2$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Onde sua fórmula fechada é dada por $F_n = {((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)}\Big/{\sqrt{5}}$. Curioso, não?

Em alguns problemas de contagem nos vêm a mente tentar achar uma recorrência que relacione o caso n com casos anteriores... vamos a uns exemplos que tudo vai fazer mais sentido!

Exemplo 1: Quantas são as permutações de n objetos?

Solução: Bem, seja P_n o número de tais permutações. Bom, sabemos que o primeiro elemento da permutação pode ser escolhido de n maneiras. Após a escolha desse primeiro elemento, os demais $(n - 1)$ elementos se permutam entre si. Eles podem permutar entre si de P_{n-1} maneiras.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, $P_n = n \times P_{n-1}$.

A partir disso, sabendo que $P_1 = 1$, obtemos indutivamente $P_n = n!$.

Exemplo 2: (OBM) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de 10 dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar em nenhum dos dias.

Solução: Seja A_n o número de maneiras que ele pode jogar ao escolher dentre n dias. Queremos então achar A_{10}.

Verificamos então que $A_1 = 2$ e $A_2 = 3$. Agora vejamos o que acontece para $n \geq 3$:

Se Diamantino não joga no primeiro dia, a escolha dos $n - 1$ dias seguintes obedecem apenas a restrição do enunciado, e portanto ele pode jogar de A_{n-1} maneiras.

Entretanto, se Diamantino decide jogar no primeiro dia, ele não irá jogar no segundo, enquanto que os demais $n - 2$ dias seguintes obedecem apenas a restrição do enunciado. Obtendo assim A_{n-2} maneiras.

Pelo princípio aditivo $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

Braçalmente obtemos $A_3 = 5, A_4 = 8, A_5 = 13, A_6 = 21, A_7 = 34, A_8 = 55, A_9 = 89$,

$A_{10} = 144$. Portanto Diamantino pode escolher seus dias de 144 maneiras.

Resolvendo casos particulares de Recorrências

Recorrências de primeira ordem lineares são da forma $a_0 = a$ e para $n \geq 1$, $a_{n+1} = ba_n$, onde a e $b \neq 0$ são constantes. Não é tão difícil ver que a forma fechada é dada por $a_n = ab^n$, para $n \geq 0$ (Prove por indução!)

E se tivermos uma recorrência da forma $a_0 = a$ e para $n \geq 0$, $a_{n+1} = ba_n + c$, onde a, b, c são constantes, $b \neq 0$?

Se $b \neq 1$, usamos um leve truque...

$$a_{n+1} + \frac{c}{b-1} = b(a_n + \frac{c}{b-1})$$

E com isso, fazendo $b_n = a_n + \frac{c}{b-1}$ obtemos $b_n = b_0 b^n = (a + \frac{c}{b-1})b^n$ obtendo finalmente

$$a_n = (a + \frac{c}{b-1})b^n - \frac{c}{b-1}$$

Caso $b = 1$, vamos ter então $a_{n+1} = a_n + c$, o que facilmente nos dá $a_n = a + cn$.

Recorrências lineares de segunda ordem são recorrências da forma $T_0 = u, T_1 = v$ e

$$T_n + aT_{n-1} + bT_{n-2} = 0$$

Para $n \geq 2$, onde a e b são constantes.

Para resolvê-las, precisamos considerar a equação (chamada equação característica da recorrência) $x^2 + ax + b = 0$. Tal equação terá duas raízes (podendo ser reais ou não).

Sejam α e β as raízes da equação característica.

Se α≠β, então $T_n = C\alpha^n + D\beta^n$, onde C, D são constantes que podem ser calculados através dos termos iniciais T_0, T_1.

Se α=β, então $T_n = (Cn + D)\alpha^n$, onde C, D são constantes que podem ser calculados através dos termos iniciais T_0, T_1.

A prova de tais fórmulas segue por indução e a deixamos a cargo do leitor.

De posse disso, como exercício, ache a fórmula fechada de c_n do terceiro exemplo mostrado acima:

$c_0 = 2, c_1 = 3$ e $c_{n+1} = 3c_n - 2c_{n-1}$ para $n \geq 1$.

Além disso, prove que a fórmula fechada para a sequência e Fibonacci é dada por

$$F_n = ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) \Big/ \sqrt{5}$$

Probabilidade

Provavelmente você já deve ter ouvido as expressões “É muito provável que dê ruim” ou “Cara, as chances não estão favoráveis pro teu lado”, talvez você até já tenha chegado na cremosa perguntando: “Oi gata, quais são as minhas chances?”. Se sim, é de se esperar que a cremosa dê uma resposta entre 0 e 1, inclusive (se de fato ela der uma resposta). E sim, isso faz muito sentido! E tudo isso envolve o conceito de Probabilidade.

A probabilidade consiste simplesmente na fração de casos favoráveis dentre todos os casos possíveis.

Um exemplo clássico é o do lançamento de uma moeda honesta. Uma moeda possui duas faces (Cara e Coroa). Qual a probabilidade de obter cara?

Bem, há dois resultados passíveis da moeda (cara ou coroa), sendo apenas um deles favorável à gente (cara). Portanto a probabilidade de dar cara é $\frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{1}{2}$.

Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os casos possíveis. E definimos aqui, de maneira geral,

$$Probabilidade = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis}$$

Vejamos um outro exemplo:

Dois dados são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade que a soma dos números mostrados na face de cima seja 7.

Solução:

		Número do segundo dado					
		1	2	3	4	5	6
Número do primeiro dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1, 6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2, 5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3, 4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4, 3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5, 2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6, 1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Através da tabela acima, vimos que o espaço amostral consiste de 36 elementos enquanto que temos apenas 6 casos favoráveis. Portanto a probabilidade de obter soma 7 é $\frac{36}{6} = \frac{1}{6}$.

Aqui chegamos ao fim da teoria do nosso material.

Seguem abaixo alguns exercícios para fixar a teoria vista aqui!

Problemas

1) Prove que o produto de quaisquer n inteiros positivos consecutivos é divisível por $n!$.

2) Numa festa irão participar n pessoas. As pessoas chegam na festa uma de cada vez. Sempre que alguém chega na festa, ela aperta a mão das pessoas que chegaram antes dela. Através da contagem total de apertos de mão na festa, prove que
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) (Teorema das linhas) Prove que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

4) (Teorema das colunas) Prove que
$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

5) (Teorema das diagonais) Prove que
$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

6) Quantas são as permutações de (1,2,...,10) nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

7) Quantas são as permutações dos números 1,2,...,n nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a k+4, para todo k?

8) Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

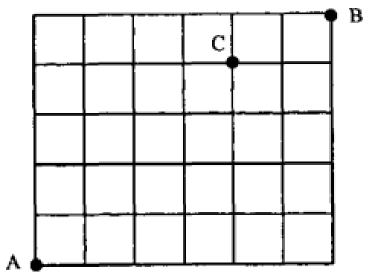
9) Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantas formas eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um dever convidar 6 pessoas?

10) Quantos são os anagramas da palavra CARAGUATATUBA?

11) De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de altura?

12) Em uma escola x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum. Determine x e o número de professores em cada banca.

13) A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



(a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?
(b) Quantos desses trajetos passam por C?

14) Uma partícula, estando no ponto (x,y,z), pode mover-se para o ponto (x+1,y,z) ou para o ponto (x,y+1,z) ou para o ponto (x,y,z+1). Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar, partindo do ponto (0,0,0), para chegar ao ponto (a,b,c), com a,b,c inteiros positivos?

15) Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x + y + z + w < 6$?

16) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

17) Uma fábrica possui 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

18) Quantos inteiros entre 1 e 100000, inclusive, têm a propriedade: “cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor”.

19) De quantos modos podemos escolher 3 números distintos dentre 1,2,...,150 de modo que a soma dos números escolhidos seja divisível por 3?

20) Ao expandirmos $(2+x)^{2021}$, qual o coeficiente do termo x^{500}?

21) Determine o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO tal que as 5 vogais não aparecem todas consecutivas?

22) Listamos em ordem crescente todos os números de 5 dígitos que são permutações dos dígitos de 12467. Em que posição aparece o número 62417?

23) O número de arranjos de $n+2$ objetos tomados 5 a 5 é $180n$. Determine os possíveis valores inteiros positivos de n.

24) De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de modo que essas diagonais não se cortem?

25) Em uma circunferência marcam-se 2021 pontos brancos e um ponto preto. Consideremos todos os possíveis polígonos convexos com vértices nestes pontos. Separamos os polígonos em 2 tipos:
Tipo 1: Os que têm somente vértices brancos;
Tipo 2: Os que têm um vértice preto como um de seus vértices.
Existem mais polígonos do tipo 1 ou do tipo 2? Quantos a mais?

26) Para inteiros positivos h, m, r, com r o menor dos três, prove que
$$\binom{h}{0}\binom{m}{r}+\binom{h}{1}\binom{m}{r-1}+\binom{h}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{h}{r}\binom{m}{0}=\binom{h+m}{r}$$
Dica: Imagine que dentre h homens e m mulheres, deseja-se formar uma comissão com exatamente r deles.

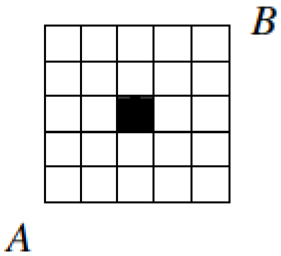
27) (OBM) Uma permutação $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ dos números $(1,2,\dots,n)$ é *legal* se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de 3 e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de 3. Por exemplo, (4,6,2,5,3,1) é uma permutação legal de (1,2,3,4,5,6). Entretanto (1,2,5,3,4,6) não é uma permutação legal do mesmo, pois os números 1 e 2 são vizinhos e sua soma é múltiplo de 3. Além disso, outra razão para ela não ser legal, é que os vizinhos do número 4, que são o 3 e o 6, diferem por um múltiplo de 3.
(a) Determine o número de permutações legais de (1,2,3,4,5,6).
(b) Determine o número de permutações legais de (1,2,3,4,...,2015,2016).

28) (OBM) No super bola, o mais novo jogo de futebol, o jogador joga em temporadas. Cada temporada possui sete partidas e em cada partida o jogador pode obter 3 pontos se vencer, 1 ponto se empatar e 0 pontos se perder. De quantos modos diferentes um jogador pode obter exatamente 15 pontos em uma temporada?

29) (OBM) Determine o número de quádruplas ordenadas de inteiros positivos (x, y, z, w) que satisfazem

$$x \times y \times z \times w = 2013$$

30) (OBM) Uma formiga deve caminhar ao longo das linhas pretas do desenho abaixo do vértice A até o vértice B deslocando-se apenas 1 quadradinho para esquerda ou para cima. Sabendo que a formiga não pode passar pelos vértices do quadrado preto, determine o número de caminhos diferentes que a formiga pode percorrer.



31) (OBM) Existem 20 cidades marcadas em uma circunferência. Um comerciante deseja percorrer as 20 cidades através de um caminho que passe por cada cidade apenas uma vez, que sempre uma duas cidades através de um segmento de reta e que esses segmentos de reta percorridos entre as cidades nunca se cruzem. De quantas formas esse comerciante pode estabelecer tal rota?

32) (OBM) Muitas pessoas conhecem a sequência de Fibonacci, mas o que muita gente não sabe é que na mesma época um matemático brasileiro criou a sequência de Somanacci. Essas sequências são geradas a partir de 3 termos iniciais inteiros positivos menores que 2012 e cada termo, a partir do quarto, é a soma de todos os termos anteriores. Quantas sequências de Somanacci distintas possuem o número 2012 em alguma posição?

33) (IMC) Seja n inteiro positivo. Calcule o número de palavras w que satisfazem as seguintes três propriedades.

1. w consiste de n letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$;
2. w contém um número par de a's;
3. w contém um número par de b's.

Por exemplo, para $n = 2$ há 6 palavras possíveis: aa, bb, cc, dd, cd, dc.

34) (IMC) Para todo inteiro positivo n, seja $p(n)$ o número de maneiras de expressar n como soma de inteiros positivos. Por exemplo, $p(4) = 5$ pois

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Defina também $p(0) = 1$.

Prove que $p(n) - p(n-1)$ é o número de maneiras de expressar n como soma de inteiros estritamente maiores que 1.

35) (JBMO SL) Um conjunto S é chamado *amigável* se ele possui as duas seguintes propriedades:
   (i) S tem exatamente 4 elementos;
   (ii) Para todo $x \in S$, pelo menos um dos números $x - 1$ ou $x + 1$ pertence a S.
   Encontre o número de subconjuntos amigáveis de $\{1,2,3, \dots, n\}$.

36) Considere um conjunto de n retas distintas no plano, sem duas paralelas, nem 3 concorrentes em um único ponto. Em quantas regiões estas retas dividem o plano?

37) (Korea) Para n inteiro positivo, denote $p(n)$ o número de quádruplas inteiras não-negativas (x, y, z, w) tais que $x + 2y + 2z + 3w = n$. Denote por $q(n)$ o número de quádruplas inteiras não-negativas (a, b, c, d) tais que

   (i) $a + b + c + d = n$;
   (ii) $a \geq b \geq d$;
   (iii) $a \geq c \geq d$

   Prove que $p(n) = q(n)$ para todo n.

38) (Korea) Seja m inteiro positivo. Prove que o número de pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem as duas seguintes condições é par.
   (i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$
   (ii) $2y \leq x - 1$

39) (Korea) Para todo inteiro não-negativo i há sete cartas com o número 2^i escrito nelas. De quantas maneiras podemos selecionar algumas das cartas tais que a soma dos números nas cartas selecionadas seja n?

40) (USAJMO) Seja $P(n)$ o número de permutações $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $(1,2, \dots, n)$ tal que ka_k é um quadrado perfeito para todo $1 \leq k \leq n$. Determine o menor n tal que $P(n)$ é múltiplo de 2010.

41) (APMO) Seja $A(n)$ o número de sequências $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ de inteiros positivos tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ e cada $a_i + 1$, $i = 1,2, \dots, k$, é uma potência de 2. Seja $B(n)$ o número de sequências $b_1 \geq b \geq \cdots \geq b_m$ de inteiros positivos tais que $b_1 + b_2 + \cdots + b_m = n$ e cada desigualdade $b_j \geq 2b_{j+1}$, $j = 1,2, \dots, m - 1$, ocorre. Prove que $A(n) = B(n)$ para todo inteiro positivo n.

42) Em uma urna há uma bola marcada com o número 1, duas bolas marcadas com 2, três bolas marcadas com 3, e assim sucessivamente, até n bolas marcadas com n. Duas

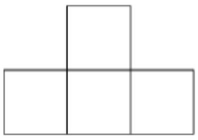
bolas são retiradas aleatoriamente ao mesmo tempo. Determine a probabilidade de as duas bolas possuírem o mesmo número.

43) Dizemos que uma k-úpla, $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de inteiros positivos é ímparlegal se k é ímpar e $1a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k = 1979$. Analogamente, chamamos uma k-úpla, $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de inteiros positivos parlegal se k é par e $1a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k = 1979$. Prove que o número de úplas imparlegais e parlegais são iguais.

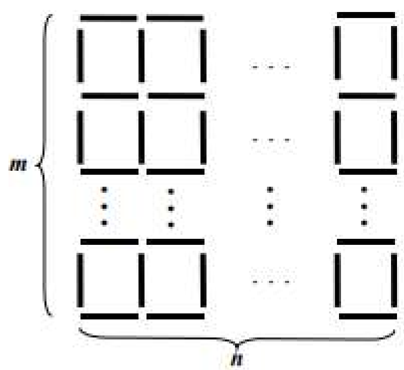
44) (IMO) Seja $ABCDEFGH$ um octógono regular. Um sapo começa no vértice A. Se em algum momento o sapo se encontra em um vértice distinto de E, ele pula para um dos vértices adjacentes. Quando o sapo atinge o vértice E, ele para. Seja a_n o número de caminhos distintos com exatamente n pulos terminando em E. Prove que:

$$a_{2n-1} = 0;\ a_{2n} = {\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)}\Big/{\sqrt{2}}$$

45) (CONE SUL) Seja n um inteiro positivo. Determine o número de maneiras que um tabuleiro $4 \times 4n$ pode ser coberto utilizando apenas o seguinte tetraminó:



46) (OBM) Colocamos vários palitos sobre uma mesa de modo a formar um retângulo $m \times n$, como mostra a figura. Devemos pintar cada palito de azul, vermelho ou preto de modo que cada um dos quadradinhos da figura seja delimitado por exatamente dois palitos de uma cor e dois de outra cor. De quantas formas podemos realizar esta pintura?



47) (OBM) Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

48) (OBM) Determine a quantidade de sequências $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que cada a_i é 1,2,3,4 ou 5, para cada $i = 1,2,3,4,5$, e além disso temos $a_{a_j=}a_j$ para todo $j =$ 1,2,3,4,5.

49) (OBM) Quantas são as permutações de $(1,2,3,\ldots,9)$ com a propriedade de que, para todo $1 \leq i \leq 8$, os números que aparecem entre i e $i+1$(onde i pode aparecer tanto antes como depois de $i+1$) são todos menores do que i?

50) (OBM) Esmeralda tem um círculo de cartolina dividido em n setores circulares, numerados de 1 a n,no sentido horário. De quantas maneiras Esmeralda pode pintar a cartolina, pintando cada setor com uma cor tendo disponíveis k cores e de modo que quaisquer dois setores circulares vizinhos (isto é, que têm um segmento em comum como fronteira) tenham cores diferentes? Note que isso implica que os setores de números 1 e n devem ter cores diferentes.

51) (OBM) Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita *alternada* quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?

52) (OBM) No programa de auditório *Toto Bola*, o apresentador *Ciço Magallanes* dispõe de duas caixas idênticas. Um voluntário da plateia é chamado a participar da seguinte brincadeira: ele recebe dez bolas verdes e dez bolas vermelhas e as distribui nas duas caixas, sem que o apresentador veja, e de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola. Em seguida, o apresentador escolhe uma das caixas e retira uma bola. Se a bola for VERDE, o voluntário ganha um carro. Se for VERMELHA, ele ganha uma banana. Determine a máxima probabilidade que o voluntário tem de ganhar um carro.

53) (OBM) Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade $\frac{1}{2}$ para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

54) (OBM) Considere um (n+1)-ágono regular com alguns de seus lados ou diagonais traçados (podendo inclusive ser nenhum ou todos), $n \geq 3$. Chamemos os lados e diagonais traçados de arestas. Queremos pintar as arestas com duas cores de forma que não hajam duas arestas disjuntas (sem vértice em comum) da mesma cor. Mostre que há, no máximo, 2^n de tais colorações.

Bibliografia

[1] Análise Combinatória e Probabilidade; Augusto M., João C., Paulo C., Pedro F.

[2]https://www.obm.org.br

[3]https://artofproblemsolving.com