# 24ª Semana Olímpica
# Nível 1
# Profª. Kellem Corrêa Santos

## Desigualando as Médias

**Desigualdade triangular:** Em todo triângulo, a soma de dois lados é sempre maior que o terceiro lado. A versão mais completa desta desigualdade é:

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |a-b| < c < a+b \end{cases}$$

**Desigualdade básica:** O quadrado de qualquer número real é sempre não negativo, sendo zero se, e somente se, o número for zero.

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Desigualdade das médias:** Sejam $x$ e $y$ dois números reais positivos. Definimos a média aritmética e a média geométrica entre eles, respectivamente, como:

$$M.A. = \frac{x+y}{2} \text{ e } M.G. = \sqrt{xy}$$

Ent;ao,

$$M.A. \geq M.G. \text{ e } M.A. = M.G. \Leftrightarrow x = y$$

Em geral, sendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ positivos, $n \geq 2,$ temos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

e

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

**<u>Aquecimento 1:</u>** Sabendo que dois lados de um triângulo isósceles (dois lados iguais e um diferente) medem 4cm e 10cm, quanto vale o perímetro desse triângulo?

**<u>Aquecimento 2:</u>** Sabendo que $x$, $y$ e $z$ são positivos e satisfazem a $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ e a $x^2 y = 8$, encontre o valor de $x + y - z$.

**<u>Exercícios:</u>**

1) Prove que a média harmônica entre dois números positivos é menor ou igual à média geométrica entre eles, onde a média harmônica é definida como o inverso da média aritmética dos inversos dos números. Conclua que as médias se igualam se, e só se, os números forem iguais.

2) Prove que a média quadrática entre dois números positivos distintos é maior que a média aritmética entre eles, onde a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos seus quadrados.

3) Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ positivos distintos dois a dois, $n \geq 2$, e seja $\bar{x}$ a sua média aritmética. Prove que pelo menos um dos números é maior que $\bar{x}$ e que pelo menos um deles é maior que $\bar{x}$.

4) Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x), x \in (0,1)$.

5) Determine o valor máximo da função $f(x) = x^2(1-x), x \in (0,1)$.

6) Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)^2, x \in (0,1)$.

7) Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)^3, x \in (0,1)$.

8) Prove que, se $a$, $b$ e $c$ são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2 + b^2 = kc^2$, então $k > \frac{1}{2}$.

9) Sejam $a$ e $b$ números reais positivos tais que $a + b = 1$. Prove que $ab^2 \leq \frac{4}{27}$.

10) Mostre que, em um grupo de 100 pessoas, há sempre pelo menos 9 pessoas que nasceram no mesmo mês.

11) Se $x$, $y$ e $z$ são números reais positivos, encontre o valor mínimo da expressão $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

12)

a) Prove que, se e $a$ e $b$ são inteiros positivos com $a \neq -b$, então $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

b) Em uma lousa, escrevemos *n* números. E permitido apagar qualquer par deles *a* e *b*, escrevendo $(a + b)/4$ no lugar. Repetindo tal procedimento $n - 1$ vezes, obtemos o número *k*. Se os *n* números iniciais eram 2012, prove que k ≥ 2012/*n*.