Cícero Thiago - cicerothmg@gmail.com

Teorema 1. Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, com p_1, p_2, ..., p_k números primos α_i inteiros não negativos então o total de divisores positivos de n é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Demonstração. Seja
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$
com $p_1, p_2, \dots, p_k$ números primos distintos e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ inteiros positivos. Aritmética elementar garante que um inteiro positivo d divide n se, e só se, $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, onde $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, para $1 \le i \le k$. Portanto, n possui tantos divisores positivos quantas sejam as maneiras de escolhermos os inteiros $\beta_1, \dots, \beta_k$, tais que $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ para $1 \le i \le k$. Como há exatamente $\alpha_i + 1$ possibilidades para β_i (quais sejam, 0, 1, ..., α_i), invocando novamente o princípio multiplicativo, concluímos que n possui exatamente
$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1) \tag{1}$$
divisores positivos.

Exemplo. Quantos divisores positivos tem o número $72 = 2^3 \cdot 3^2$?
Solução. Aritmética elementar ensina que cada divisor positivo do número $72 = 2^3 \cdot 3^2$ possui a forma $2^a \cdot 3^b$, com $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $b \in \{0, 1, 2\}$. Por exemplo, $2^3 \cdot 3^1$, $2^0 \cdot 3^2$ e $2^2 \cdot 3^0$ são divisores positivos de 72. Portanto, o número de divisores positivos de 72 coincide com o número de pares ordenados (a, b) de inteiros tais $0 \le a \le 3$ e $0 \le b \le 2$. Pelo princípio multiplicativo, há exatamente $4 \cdot 3 = 12$ de tais pares ordenados.

Exemplo. Quantos divisores positivos pares possui o número $72 = 2^3 \cdot 3^2$?
Solução. Cada divisor positivo par do número $72 = 2^3 \cdot 3^2$ possui a forma $2^a \cdot 3^b$, com $a \in \{1, 2, 3\}$ e $b \in \{0, 1, 2\}$. Portanto, o número de divisores positivos pares de 72 coincide com o número de pares ordenados de inteiros (a, b), tais que $1 \le a \le 3$ e $0 \le b \le 2$. Pelo princípio multiplicativo, tal número é igual a $3 \cdot 3 = 9$.

Exemplo. (AIME) Seja $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$. Quantos divisores positivos de n^2 são menores do que n mas não dividem n?
Solução. Mais geralmente, seja $n = p^r \cdot q^s$, em que p e q são primos distintos e r e s são inteiros positivos. Então, $n^2 = p^{2r} \cdot q^{2s}$, de forma que, por (1), n^2 possui exatamente
$$(2r + 1)(2s + 1)$$
divisores positivos. Observe agora que, para cada divisor positivo d de n^2, tal que $d < n$, o número natural $\frac{n^2}{d}$ também é um divisor positivo de n^2, tal que $\frac{n^2}{d} > n$. Portanto, excluído o divisor n de n^2, concluímos que existem exatamente
$$\frac{(2r + 1)(2s + 1) - 1}{2} = 2rs + r + s$$

divisores positivos de n^2 e que são menores que n.
Como (novamente por (1)) n possui $(r+1)(s+1)$ divisores positivos (incluído o próprio n), e como todo divisor de n é também divisor de n^2, concluímos que existem

$$(2rs+r+s)-[(r+1)(s+1)-1]=rs$$

divisores positivos de n^2, menores que n e que não são divisores de n.
Em particular, se $r=31$ e $s=19$, então $rs=589$.

Exemplo. Qual a soma dos divisores positivos de $72=2^3\cdot 3^2$?
Solução. Listando e somando todos os divisores positivos de 72, encontramos

$$1+2+3+4+6+8+9+12+18+24+36+72=195.$$

Entretanto, podemos fazer isso da seguinte maneira mais organizada:

$$\begin{aligned}
&1+2+3+4+6+8+9+12+18+24+36+72=\\
&=2^0\cdot 3^0+2^1\cdot 3^0+2^0\cdot 3^1+2^2\cdot 3^0+2^1\cdot 3^1+2^3\cdot 3^0+\\
&\quad+2^0\cdot 3^2+2^2\cdot 3^1+2^1\cdot 3^2+2^3\cdot 3^1+2^2\cdot 3^2+2^3\cdot 3^2\\
&=(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot 3^0+(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot 3^1\\
&\quad+(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot 3^2\\
&=(2^0+2^1+2^2+2^3)\cdot(3^0+3^1+3^2).
\end{aligned}$$

Agora, observe que $2^0+2^1+2^2+2^3$ é uma PG com $3+1=4$ termos e $3^0+3^1+3^2$ é uma PG com $2+1=3$ termos. Por fim, lembrando que

$$1+r^1+r^2+\ldots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \tag{2}$$

para todo real $r\neq 1$, concluímos que a soma dos divisores positivos de 72 é igual a

$$\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^3-1}{3-1}=15\cdot 13=195.$$

Generalizando o exemplo anterior, seja

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

com $p_1,p_2,\ldots,p_k$ números primos distintos e $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ inteiros positivos. Distribuindo os produtos

$$\begin{gathered}
(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\ldots\\
\ldots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{\alpha_k}),
\end{gathered}$$

obtemos, pelo princípio multiplicativo, uma soma com exatamente $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ parcelas, na qual cada divisor positivo de n comparece precisamente uma vez. Fazendo

r sucessivamente igual a p_1, p_2, ..., p_k em (2), concluímos que a soma dos divisores positivos de n é igual a
$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Teorema 2. O produto dos divisores positivos de um número inteiro $n > 1$ é igual a
$$n^{\frac{d(n)}{2}},$$
em que $d(n)$ é igual ao número de divisores positivos de n.
Demonstração. Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_k$, $k = d(n)$, todos os divisores positivos de n, tais que $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Assim,
$$n = d_1 \cdot d_k,$$
$$n = d_2 \cdot d_{k-1},$$
$$\vdots$$
$$n = d_k \cdot d_1.$$
Multiplicando todas as igualdades obtemos
$$n^k = (d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k)^2 \iff$$
$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = n^{\frac{d(n)}{2}} \iff$$
$$P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}.$$

Teorema 3. Sejam a e b números inteiros e positivos quaisquer. Então,
$$d(a\cdot b) \leq d(a)\cdot d(b),$$
com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) = 1$.
Nota: $d(n)$ é igual ao número de divisores positivos de n.
Demonstração. Inicialmente assuma que a e b são primos entre si. Assim, $a = p_1^{n_1}\cdot\ldots p_k^{n_k}$ e $b = q_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot q_t^{m_t}$, em que $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_t$ são primos, dois a dois distintos. Logo, como $a\cdot b = p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}\cdot q_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot q_t^{m_t}$, tem - se que
$$d(a) = (n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1),$$
$$d(b) = (m_1+1)\cdot\ldots\cdot(m_t+1),$$
$$d(a\cdot b) = (n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)\cdot(m_1+1)\cdot\ldots\cdot(m_t+1),$$
e, com isso, $d(a\cdot b) = d(a)\cdot d(b)$. Assuma, agora, que a e b não são primos entre si, ou seja, $a = r_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot r_l^{a_l}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$ e $b = r_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot r_l^{b_l}\cdot q_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot q_t^{m_t}$, em que $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são os fatores primos em comum. Então,
$$d(a) = (a_1+1)\cdot\ldots\cdot(a_l+1)\cdot(n_1+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1),$$

$$d(b) = (b_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (b_l + 1) \cdot (m_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_t + 1),$$

$$d(a \cdot b) = (a_1 + b_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_l + b_l + 1) \cdot (n_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_k + 1) \cdot (m_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_t + 1).$$

Como, para cada $i(1 \leq i \leq l$ tem - se que $a_i + b_i + 1 < (a_i + 1)(b_i + 1)$, conclui - se que $d(a \cdot b) < d(a) \cdot d(b)$. Finalmente, em qualquer dos casos, tem - se que $d(a \cdot b) \leq d(a) \cdot d(b)$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, a e b são primos entre si.

Exercícios propostos

1. Determine todos os números inteiros e positivos n tais que $d(n)$ é um número ímpar, em que $d(n)$ representa a quantidade de divosres positivos do número n.

2. Qual o menor inteiro positivo com o mesmo número de divisores de 2020?

3. Um número natural é chamado de *número perfeito* se ele é igual à soma de seus divisores naturais diferentes dele mesmo. Prove que se $2^p - 1$ é um número primo, então $2^{p-1}(2^p - 1)$ é um número perfeito.

4. (OBM) Mostre que existem infinitos números inteiros e positivos n satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:
(i) n é ímpar;
(ii) n possui exatamente 1200 divisores positivos;
(iii) existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e n como medida de um dos catetos.

5. Um inteiro positivo n possui exatamente 80 divisores positivos, que ordenados do menor para o maior são

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{79} < d_{80} = n.$$

Determine quantos divisores positivos, no mínimo, pode ter o número d_{73}.

6. (OBM) Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é poderoso se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são $1, 2, 3, 4$ e 6 e $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

7. Seja n um número inteiro e positivo, prove que $d(n) < 2\sqrt{n}$, em que $d(n)$ representa a quantidade de divisores positivos do número n.

8. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $d(n)$ é um divisor de n, em que $d(n)$ representa a quantidade de divisores positivos do número n.

9. (Irlanda) Determine todos os inteiros positivos d que possuem exatamente 16 divisores positivos $d_1, d_2, \ldots, d_{16}$ tais que

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = d,$$

$d_6 = 18$ e $d_9 - d_8 = 17$.