FATORAÇÃO, PRODUTOS NOTÁVEIS E REPUNITS

Semana Olímpica, N1, Teresina – PI, novembro de 2021
Tiago Sandino

1. INTRODUÇÃO

Produtos notáveis são produtos que aparecem com bastante frequência e que uma hora ou outra, acabamos por memorizá-los. Veremos alguns e vários problemas ilustrando como utilizá-los.

Fatorar é quando transformamos uma expressão em um produto de fatores. Veremos desde as mais básicas até algumas das mais avançadas. Serão propostos diversos problemas para treino também.

Não veremos algumas técnicas que trabalham polinômios, como por exemplo a Fatoração Peruana (Aspa Simple e Aspa Doble), Teorema das Raízes Racionais, Dispositivo de Briot Ruffini etc.

2. PRODUTOS NOTÁVEIS

A seguir, uma lista de produtos notáveis relativamente mais simples:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$;
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

3. FATORAÇÕES

A seguir, algumas fatorações:

- $a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$;
- $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$;
- $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;
- $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

Essas duas últimas são casos particulares das duas seguintes:

- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$;
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, válida apenas se n for um número natural ímpar. Note que o sinal alterna entre positivo e negativo no segundo parêntesis.

A seguir, algumas menos triviais:

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Com a seguinte forma: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$, podemos concluir que, se os reais a, b, c forem não negativos, então $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$, uma inequação bem interessante. Demonstre essa fatoração.
- $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$. Essa é mais difícil de aparecer que a anterior, mas também pode aparecer em problemas olímpicos. Demonstre.
- $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$. Essa fatoração é atribuída a Marie-Sophie Germain e é conhecida por esse nome. Demonstre essa também.

Repunits

O nome repunit tem a ver com repetição de unidades (rep.unit). Um repunit é um número que contém apenas algarismos uns, como por exemplo, 11111, que contém cinco uns. Se chamarmos esse número de R_5, costuma ser útil notar que $R_5 = (10^5 - 1)/9$.

Veremos, além de problemas envolvendo essas fatorações e produtos notáveis, alguns envolvendo simultaneamente os termos $a - b$, $b - c$ e $c - a$, cuja soma é zero; problemas envolvendo a expressão $x^n + \frac{1}{x^n}$, com $n \geq 1$ natural; problemas com Repunits, cujo conceito é apresentado abaixo; e diversos outros problemas relacionados.

4. PROBLEMAS

1. Fatore:
a) $x^2 - 7xy + 12y^2$
b) $x^2 - 3yx - 4x + 12y$
c) $x^4 - 20x^2 + 4$
d) $x^4 - 4y^4$

2 (105 Algebra Problems). Fatore as seguintes expressões:
a) $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$
b) $(x + y)(x - y) - 4(y + 1)$
c) $4(x^2 + x - y^2) + 1$
d) $x(x - 4y) + 4(y^2 - 1)$
e) $x^2 - y^2 + 2(x + 3y - 4)$
f) $x^3 + 9x^2 + 27x + 19$
g) $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$
h) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + 3(x^2 + y^2) + 2$

3. a) Mostre que, se $a > 2$ e $b > 2$, então $ab > a + b$. b) Ache os possíveis valores do par ordenado de números naturais (a, b) se $2ab - a - b = 2$.

4 (OCM, N2, 1998, P3/6). Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4$.

5. Ache todos os números reais x tais que

$$\sqrt[3]{20 + x\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - x\sqrt{2}} = 4$$

6. Simplifique a expressão

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 - ab} + \frac{1}{b^2 - ba}.$$

7. Simplifique

$$\frac{a^2 + 2a - 80}{a^2 - 2a - 120}.$$

8. Resolva nos reais a equação $x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 0$.

9. Seja x um número real. Fatore a expressão $x^4 + x^2 + 1$.

10. Fatore $(x^4 - 6x^2 + 1)(x^4 - 7x^2 + 1)$.

11. Prove que para todos os números reais a, b, c

$$\left(\frac{2a + 2b - c}{3}\right)^2 + \left(\frac{2b + 2c - a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2c + 2a - b}{3}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

12. Sejam m e n inteiros positivos. Prove que $(m^3 - 3mn^2)^2 + (3m^2n - n^3)^2$ é um cubo perfeito.

13. Resolva nos inteiros a equação:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = y$$

14. Simplifique a expressão

$$\frac{x^2 + 4y^2 - z^2 + 4xy}{x^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz}.$$

15. Sejam a, b, c, d números reais tais que $a + b + 2ab = 3$, $b + c + 2bc = 4$ e $c + d + 2cd = -5$. Ache quanto vale $d + a + 2da$.

16. Fatore $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

17. a) Fatore a expressão $x^5 + x + 1$. b) Ache a fatoração em primos de 100011.

18. Sejam a, b e c números reais tais que $ab + bc + ca = 1$. Prove que

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} = \frac{2}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

19. Se a, b, c, d são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$, ache o valor máximo de

$$(a + b)^2 + (a + c)^2 + (a + d)^2 + (b + c)^2 + (b + d)^2 + (c + d)^2.$$

20. Fatore $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ e ache uma condição necessária e suficiente para a, b, c satisfazerem $a^2b + b^2c + c^2a = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

21. Fatore $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$ e ache números reais a, b, c para os quais

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b) = 0.$$

22. Fatore $(a - b)(a^2 + b^2 - c^2)c^2 + (b - c)(b^2 + c^2 - a^2)a^2 + (c - a)(c^2 + a^2 - b^2)b^2$.

23. Prove que para todos os números reais a, b, c tais que $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$ temos

$$\frac{a - b}{a + b} + \frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} = -\frac{a - b}{a + b} \cdot \frac{b - c}{b + c} \cdot \frac{c - a}{c + a}.$$

24. Prove que se a, b, c são números reais dois a dois distintos, então

$$\frac{a - b}{1 + ab} + \frac{b - c}{1 + bc} + \frac{c - a}{1 + ca} \neq 0.$$

25. Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ e mostre que se a, b, c são positivos, então

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc.$$

26. Prove que para todos os números reais a, b, c temos

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

27. Sejam a, b, c números reais tais que

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 6.$$

Prove que $a^3+b^3+c^3 = 3(a+b+c+abc)$.

28. Sejam a, b, c números reais tais que $a+b+c=1$. Prove que

$$a^3+b^3+c^3-1 = 3(abc-ab-bc-ca).$$

29. Sejam a, b, c números reais tais que

$$\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{6}\right)^3+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{6}-\frac{c}{2}\right)^3+\left(\frac{a}{6}-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

30. Ache todos os números reais a, b, c tais que

$$\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a} = 0.$$

31. Prove que se a, b, c, d são números reais satisfazendo $a+b+c+d=0$, então

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = 3(abc+bcd+cda+dab).$$

32. Sejam a, b, c números reais não nulos, diferentes dois a dois, tais que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ e } a^3+b^3+c^3 = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Prove que $a+b+c=3$.

33 Seja x um número real tal que $x-\frac{1}{x}=5$. Determine o valor de $x^2+\frac{1}{x^2}$.

34 (Banco de Questões OBMEP, N2, 2020). Se $6xy-\sqrt{3}x^2=\sqrt{3}y^2$, calcule

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^4.$$

35 (OCM, N2, 1997). Se $x^2+x+1=0$, calcule o valor numérico de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots+\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2.$$

36 (Eslovênia, 1994, Fourth Grade, P3/4). Prove que cada número da sequência

$$49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$$

é um quadrado perfeito (em cada número há n quatros, $n-1$ oitos e 1 nove).

37. O inteiro positivo n é formado de k algarismos 9. Mostre que a soma de todos os algarismos de n^2 é igual a $9k$.

38. Para cada inteiro positivo n, sejam $A(n)$ e $B(n)$ dois números inteiros formados por $2n$ algarismos iguais a 1 e n algarismos iguais a 2, respectivamente. Mostre que $A(n) - B(n)$ é um quadrado perfeito.

39. Sem efetuar a multiplicação, calcule o valor de $(999.999.999)^2$.

40. O inteiro A é formado por 666 algarismos iguais a 3, e o número B por 666 algarismos iguais a 6. Que algarismos aparecem no produto AB?

41. Calcule o valor de

$$\frac{13579}{(-13579)^2 + (-13578)(13580)}.$$

42. Quanto vale

$$\frac{83^3 + 17^3}{83 \times 66 + 17^2}?$$

43. Calcule $2008 \times 20092009 - 2009 \times 20082008$.

44 (Balcânica Júnior, 1998). Prove que o número

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{1997}\underbrace{22 \ldots 2}_{1998}5$$

é um quadrado perfeito.

45 (Singapura Jr., 2011, Fase 1/2). Seja

$$x = 1\underbrace{000 \ldots 000}_{2011 \text{ vezes}}1\underbrace{000 \ldots 000}_{2012 \text{ vezes}}50.$$

Qual dos seguintes itens é um quadrado perfeito?

a) $x - 75$ b) $x - 25$ c) x d) $x + 25$ e) $x + 75$

46 (Singapura Jr., 2011, Fase 1/2). Suponha $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{2}$ e $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Ache

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

47 (Singapura Jr., 2011, Fase 1/2). Suponha $x = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Ache o valor exato de

$$\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}.$$

48 (OBM, N2, 2012, Fase 3, P.5). Considere os números reais a e b tais que $(a + b)(a + 1)(b + 1) = 2$ e $a^3 + b^3 = 1$. Encontre o valor de $a + b$.

5. AJUDA

1.
a) $(x - 3y)(x - 4y)$.
b) $(x - 4)(x - 3y)$.
c) $(x^2 + 4x - 2)(x^2 - 4x - 2)$.
d) $(x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2)$.

2.
a) $x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 - y^2 + xy)(x^2 - y^2 - xy)$. Chamamos essa técnica inicial de "completar quadrado" e estamos nos referindo ao produto notável trinômio quadrado perfeito.
b) $(x + y)(x - y) - 4(y + 1) = x^2 - (y^2 + 4y + 4) = x^2 - (y + 2)^2 = (x + y + 2)(x - y - 2)$.
c) $4(x^2 + x - y^2) + 1 = (2x - 2y + 1)(2x + 2y + 1)$.
d) $(x - 2y + 2)(x - 2y - 2)$.
e) $(x - y + 4)(x + y - 2)$.
f) $x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = (x + 3)^3 - 8 = (x + 1)(x^2 + 8x + 19)$. Quando estudarmos equações do segundo grau, veremos que este último fator não pode ser fatorado mais ainda por possuir "discriminante negativo". Falando em técnicas futuras, poderíamos ter usado o Teorema das Raízes Racionais para perceber que -1 é raiz e utilizar o Dispositivo de Briot-Ruffini para fatorar. Estas últimas técnicas serão estudadas sob o tópico de Polinômios.
g) $(x - 1)(x^2 + 4x + 7)$.
h) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + 3(x^2 + y^2) + 2 = (x + 1)^3 + (1 - y)^3 = (x - y + 2)(x^2 + y^2 + xy + x - y + 1)$.

3. a) $ab > a + b \Rightarrow ab - a - b > 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 > 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) > 1$. b) $(1,3), (3,1)$.

4. $\frac{b^2+b}{a^2+a} = 4 \Rightarrow 4a^2 + 4a = b^2 + b \Rightarrow (2a + 1)^2 = b^2 + b + 1$. Do lado esquerdo temos um quadrado, mas do lado esquerdo não, pois $b^2 < b^2 + b + 1 < (b + 1)^2$. Esta técnica é conhecida como "encaixar entre quadrados", e mostra que $b^2 + b + 1$ não é o quadrado de um inteiro por estar entre dois quadrados de inteiros consecutivos.

5. Chame um dos radicais maiores de a e o outro de b e use um dos produtos notáveis: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ ou $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

6. O mmc dos denominadores é $ab(a - b)$.

7. Complete os quadrados em cima e embaixo e fatore a diferença dos quadrados.

8. Complete $(x - 1)^3$.

9. Uma solução seria achar quaisquer a, b e c que tornassem a identidade $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + a)^2 - (bx + c)^2$ verdadeira. Outra solução seria aproveitar a simetria do polinômio da seguinte forma $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1$.

10. Use qualquer uma das técnicas do problema anterior. Se for usar a segunda, pode ser que você precise usar $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

11. Simplesmente expanda cada quadrado ou, se quiser tornar as contas mais rápidas, faça $S = a + b + c$, de modo que $2a + 2b - c = 2S - 3c$ etc.

12. Simplesmente faça as contas até chegar em $(m^2 + n^2)^3$. Observando que o primeiro termo é igual a $m^2(m^2 - 3n^2)^2$ e que o segundo é igual a $n^2(3m^2 - n^2)^2$, notamos que podemos desde o início substituir m^2 por a e n^2 por b para tornar as contas mais fáceis.

13. Note que $x = 1$ e $x = -2$ zeram o numerador e que $x = 1$ e $x = 2$ zeram o denominador. Você deverá achar cinco pares ordenados como solução.

14. Temos uma diferença de quadrados em cima e embaixo.

15. Use $1 + 2x + 2y + 4xy = (1 + 2x)(1 + 2y)$.

16. Use $t = x + \frac{1}{x}$. Outra maneira começa com $x^4 + 2x^3 + (2x^2) + 2x + 1 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1)$. Uma terceira maneira seria comparar a expressão com a expansão de $(a + b + c)^2$.

17. Some e subtraia x^2. Depois fatore $x^3 - 1$.

18. Substitua o 1 dos denominadores por $ab + bc + ca$ para obter fatorações tais como $a^2 + (ab + bc + ca) = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$.

19. Acrescente termos do tipo $(a - b)^4$ para obter 6 vezes $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

20. Usando $c - a = -[(a - b) + (b - c)]$, chegue à conclusão de que $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$.

21. Comece usando o mesmo truque do problema anterior.

22. Se você fizer $s = a^2 + b^2 + c^2$, obterá s vezes a expressão do penúltimo problema mais a expressão do último problema.

23. Novamente, use $c - a = -[(a - b) + (b - c)]$.

24. Novamente, use $c - a = -[(a - b) + (b - c)]$.

25. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$.

26. $x = a - b, y = b - c, z = c - a$. Use que $x + y + z = 0$.

27. Aplicação básica da fatoração.

28. Novamente, uma aplicação básica.

29. Ache as variáveis que somam zero.

30. São três números que somam zero, assim como seus cubos.

31. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = -d(a^2 + b^2 + c^2) + dab + dbc + dca$. Escreva mais três equações similares permutando ciclicamente a, b, c e d.

32. Altere de maneira conveniente as equações dadas e substitua em $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

33. 27.

34. Divida por y^2 e isole a expressão $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Resposta: 98.

35. $x(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3+x^2+x=x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1$. Assim, $x^4+\frac{1}{x^4}=x+\frac{1}{x}$, $x^5+\frac{1}{x^5}=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^6+\frac{1}{x^6}=x^3+\frac{1}{x^3}$ etc, de modo que basta calcular os três primeiros termos. Veja que $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}=\frac{-x}{x}=-1$, $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{x^4+1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}=-1$, $x^3+\frac{1}{x^3}=1+1=2$. Portanto, a soma é igual a $\frac{27}{3}\cdot[(-1)^2+(-1)^2+(2)^2]=54$.

36. Prove que $(6_{n-1}7)^2=4_n8_{n-1}9$. Use $6_{n-1}7=6\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+1$.

37. $N=10^k-1$. Podemos então calcular N^2 da seguinte forma, $N^2=\left(\underbrace{999\ldots9}_{k}\right)(10^k-1)=\underbrace{999\ldots9}_{k}\underbrace{000\ldots0}_{k}-\underbrace{999\ldots9}_{k}=\underbrace{999\ldots9}_{k-1}8\underbrace{000\ldots0}_{k-1}1$, cuja soma dos algarismos é $9k$.

38. Veja que $A(n)-B(n)=\underbrace{111\ldots1}_{2n}-\underbrace{222\ldots2}_{n}=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\frac{10^n-1}{9}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{9}-2\frac{10^n-1}{9}=\frac{(10^n-1)[(10^n+1)-2]}{9}=\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2$.

39. $(999.999.999)^2=\left(9\frac{10^9-1}{9}\right)^2=10^{18}-2\cdot10^9+1=1\underbrace{000\ldots0}_{\text{18 zeros}}-2\underbrace{000\ldots0}_{\text{9 zeros}}+1=\underbrace{999\ldots9}_{\text{8 noves}}8\underbrace{000\ldots0}_{\text{9 zeros}}1$.

40. $AB=\left(6\cdot\underbrace{111\ldots1}_{666}\right)\left(3\cdot\frac{10^{666}-1}{9}\right)=2\cdot\underbrace{111\ldots1}_{666}\cdot(10^{666}-1)=\underbrace{222\ldots2}_{666}\cdot10^{666}-\underbrace{222\ldots2}_{666}=\underbrace{222\ldots2}_{666}\underbrace{000\ldots0}_{666}-\underbrace{222\ldots2}_{666}=\underbrace{222\ldots2}_{665}1\underbrace{777\ldots7}_{665}8$. Aparecem um algarismo 1, um algarismo 8, 665 algarismos 2, 665 algarismos 7.

41. Use $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Resposta: 13.579.

42. Use $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Resposta: 100.

43. Resposta: 0.

44. $N=\underbrace{11\ldots1}_{1997}\cdot10^{1999}+\underbrace{22\ldots2}_{1998}\cdot10+5=\cdots=\left[\frac{1}{3}(10^{1998}+5)\right]^2=\underbrace{33\ldots3}_{1997}5^2$

45. Podemos fatorar o número para a seguinte forma: $x=(10^{2013}+5)^2+25$. Resposta: Item b.

46. $2=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}+2\frac{xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$. Então $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2$.

47. Sabendo que $19+8\sqrt{3}=\left(4+\sqrt{3}\right)^2$, ache $x=4-\sqrt{3}\Rightarrow(x-4)^2=3\Rightarrow x^2-8x+15=2$. Daí, com $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}=x^2+2x-1+\frac{38-20x}{x^2-8x+15}$, achamos o valor procurado, 5.

48. Use a fatoração $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$.