Invariantes

Luíze D'Urso

Semana Olímpica 2021

Problema 1 Existem apenas duas letras no alfabeto Lulu: L e U. Além disso, a linguagem satisfaz as seguintes condições: se você retirar duas letras vizinhas LU de qualquer palavra, obterá uma palavra com o mesmo significado. Analogamente, o significado de uma palavra não muda se você inserir as combinações UL ou LLUU em qualquer lugar em uma palavra. Se duas palavras não se conectam por tais operaões seus significados são distintos. As palavras LUU e ULL têm significado igual ou diferente?

Problema 2 Um círculo está dividido em 6 setores, e cada um deles tem um peão. É permitido mover dois peões quaisquer para setores vizinhos aos ocupados por eles no momento. É possível juntar todos os peões em um mesmo setor apenas com essa operação?

Problema 3 Os números inteiros de 1 a 20 estão escritos em um quadro. Pode-se apagar dois números quaisquer a e b e escrever o novo número $a + b - 1$. Qual número estará no quadro depois de 19 operações?

Problema 4 Os números inteiros de 1 a 20 estão escritos em um quadro. Pode-se apagar dois números quaisquer a e b e escrever o novo número $ab + a + b$. Qual número estará no quadro depois de 19 operações?

Problema 5 Seis Pidgey estão cada um em uma árvore. As seis árvores estão enfileiradas, com 10 metros de espaço entre duas vizinhas. Se um Pidgey voa de uma árvore para outra, na mesma hora algum outro Pidgey voa de sua árvore para outra que esteja à mesma distância, mas na direção oposta. É possível que todos os pidgeys se juntem em uma mesma árvore? E se forem sete árvores e sete Pidgey?

Problema 6 Em uma tabela 8x8 uma das células está colorida de preto e todas as outras de branco. Prove que não é possível tornar todas as células brancas apenas "recolorindo" linhas e colunas, onde "recolorir" é a operação de mudar a cor de todas as células de uma linha ou coluna.

Problema 7 Resolva o mesmo problema para uma tabela 3x3 se inicialmente a tabela possui uma única célula preta em uma das 4 posições do canto.

Problema 8 Resolva o mesmo problema para uma tabela 8x8 se inicialmente a tabela tem todas as 4 posições do canto pintadas de preto e as restantes pintadas de branco.

Problema 9 Os números inteiros de 1 a 333 estão escritos em um quadro. Pode-se apagar dois números quaisquer e substituílos pela sua diferença. Esta operação pode ser usada para se obter uma situação onde todos os números no quadro são zeros?

Problema 10 Na terra de Ooo há 13 camaleões cinzas, 15 marrons e 17 vermelhos. Quando dois camaleões de cores diferentes se encontram, ambos mudam para a terceira cor. É possível que, depois de algum tempo, todos os camaleões de Ooo estejam da mesma cor?

Problema 11 Os números $+1$ e -1 estão colocados nos vértices de um polígono regular com 12 lados, sendo 11 vértices com $+1$'s e apenas um vértice com -1. É permitido mudar o sinal dos números em $k = 3$ vértices sucessivos do polígono à sua escolha. Você pode realizar essa operação quantas vezes forem necessárias. É possível "deslocar" o único -1 para um vértice adjacente? E se $k = 4$? E se $k = 6$?

Problema 12 Uma peça especial de xadrez, chamado de "camelo", move-se em um tabuleiro 10x10 de maneira semelhante ao cavalo, mas seu andar é mais comprido: ele pode se mover para um quadrado adjacente e depois mais 3 quadrado para uma direção perpendicular. É possível que um camelo parta de alguma posição e chegue a uma casa adjacente depois de alguns passos?

Problema 13 Prove que um tabuleiro 8x8 não pode ser coberto sem sobreposições por quinze poliminós 1x4 e um único poliminó com 4 células em forma de L.

Problema 14 Prove que um tabuleiro 10x10 não pode ser coberto sem sobreposições por poliminós com 4 células em forma de T.

Problema 15 Prove que um tabuleiro 102x102 não pode ser coberto sem sobreposições por poliminós 1x4.

Problema 16 Um tabuleiro retangular foi coberto por poliminós 1x4 e 2x2 sem sobreposições. Depois os poliminós foram removidos do tabuleiro, mas um poliminó 2x2 se perdeu, e foi substituído por um 1x4. Prove que agora o tabuleiro não pode mais ser coberto pelos poliminós sem sobreposições.

Problema 17 É possível para um cavalo de xadrez passar por todos os quadrados de um tabuleiro 4xN tendo visitado cada quadrado exatamente uma vez e retornar ao quadrado inicial?

Problema 18 Finn, o humano, possui duas espadas mágicas. Uma delas pode cortar 35 cabeças de um dragão perverso. A outra pode cortar 4, mas depois disso crescem novas 2020 cabeças. Finn tem como cortar todas as cabeças, se originalmente o dragão tinha 100 cabeças?

Problema 19 Na terra de Ooo existem o reino doce e o reino do gelo. No reino doce, a taxa de câmbio é é de 10 gelos por 1 doce, e no reino do gelo, a taxa é de 10 doces por 1 gelo. O Magicman tem 1 doce e viaja de um reino a outro trocando doces e gelos sem pagar taxas extras. Prove que, a menos que ele gaste alguns doces ou gelos, nunca terá quantidades iguais de doce e gelo.

Problema 20 Temos três máquinas de impressão. A primeira aceita um cartão com dois números quaisquer a e b e retoran um cartão com os números $a+1$ e $b+1$. A segunda só aceita cartões com números pares a e b e retorna um cartão com os números $a/2$ e $b/2$. A terceira aceita dois cartões com os números a e b, b e c respectivamente e retorna um cartão com os números a e c. Todas essas máquinas também retornam o cartão que receberam.
a.É possível obter um cartão com os números 1, 2019, se tínhamos originalmente apenas um cartão com os números 5 e 19?
b.Encontre que cartões podem ser obtidos do cartão com números 5 e 19 e que cartões não podem.

Problema 21 O número 8^{2020} está escrito em um quadro. Calculamos a soma de seus algarismos, depois a soma dos algarismos do resultado, e assim por diante, até obtermos um único algarismo. Qual é esse algarismo?

Problema 22 Um tubo de ensaio da Princesa Jujuba contém amebas de 3 tipos: A, B e C. Duas amebas de dois tipos diferentes podem se fundir em uma ameba do terceiro tipo. Depois de algumas horas, restava apenas uma ameba no tubo da PJ. Qual é o tipo dessa última ameba, se inicialmente existiam 20 amebas do tipo A, 21 do tipo B e 22 do tipo C?

Problema 23 Um peão se move em um tabuleiro de xadrez nxn. Em cada jogada ele pode se mover um quadrado pra cima ou um quadrado pra direita ou um quadrado na diagonal pra baixo e esquerda. Ele pode percorrer todas as casas do tabuleiro visitando cada uma exatamente uma vez e terminar seu passeio no quadrado à direita do quadrado inicial?

Problema 24 As células de uma tabela mxn estão preenchidas com números tais que a soma dos números em cada linha e cada coluna é igual a 1. Prove que $m = n$

Problema 25 Sete copos estão em uma mesa, todos de cabeça pra baixo. É permitido virar quaisquer 4 deles em um movimento. É possível deixar todos os copos virados pra cima?

Problema 26 Sete zeros e um 1 estão posicionados nos vértices de um cubo. É permitido somar 1 aos números nas extremidades de qualquer aresta do cubo. É possível tornar todos os números iguais? Ou tornar todos os números divisíveis por 3?

Problema 27 Um círculo está dividido em 6 setores e os seis números 1, 0, 1, 0, 0, 0 estão escritos no sentido horário, um em cada setor. É permitido somar 1 aos números em dois setores adjacentes. É possível tornar todo os números iguais?

Problema 28 Um monte de 1001 pedras está em cima de uma mesa. Você pode fazer a seguinte operação: escolhe um dos montes que contém mais de uma pedra, joga fora uma pedra dele e divide o monte em dois montes menores, não necessariamente iguais. É possível chegar a uma situação em que todos os montes na mesa contêm exatamente 3 pedras?

Problema 29 Os números inteiros de 1 a n estão escritos em uma linha. É permitido trocar dois números vizinhos quaisquer. Se são executadas 1989 operações é possível que a ordem final dos números coincida com a inicial?

Problema 30 É dada uma tripla de números. É permitida a execução da seguinte operação na tripla: mudar dois dos números, digamos a e b, para $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ e $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. É possível obter a tripla $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ da tripla $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$