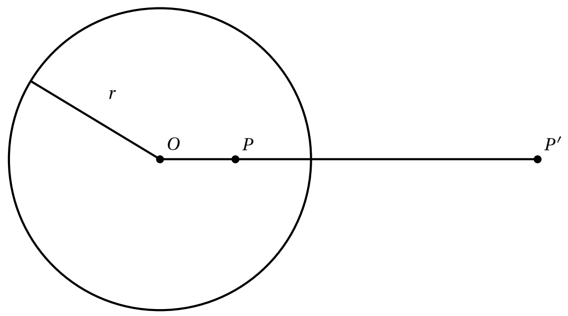
Cícero Thiago - cicerothmg@gmail.com

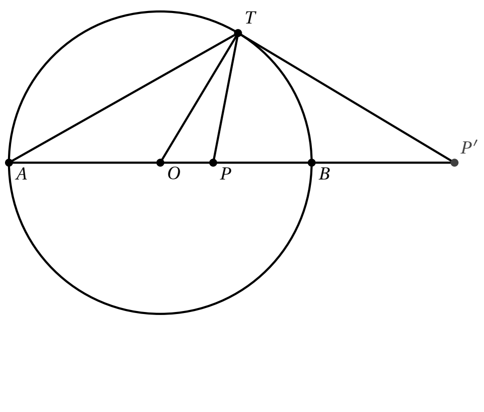
MATEMÁTICA NO RAIO X

Inversão

Definição 1. A inversão é uma transformação entre os pontos do plano e se realiza com a ajuda de uma circunferência Γ, de centro O e raio r, a que chamaremos de **circunferência de inversão**. Diremos que P' é o **ponto inverso** de P com a relação $\Gamma = (O, r)$ se
(a) P' se encontra na reta que parte de O em direção a P.
(b) $OP \cdot OP' = r^2$.



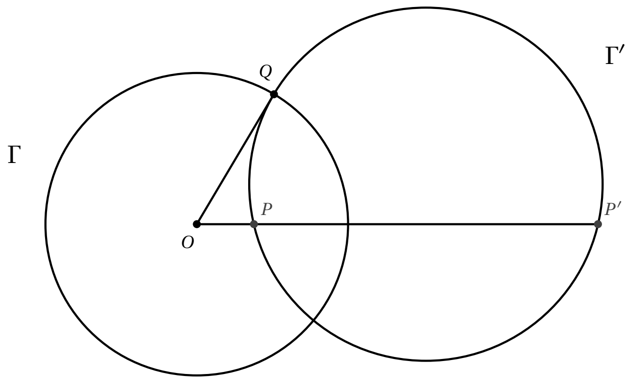
Da definição são imediatas as seguintes afirmações:
(i) Se P' é o inverso de P, então P é o inverso de P'.
(ii) Os pontos de Γ são seus próprios inversos e são os únicos pontos com essa propriedade.
(iii) Para os pontos inversos P e P', que não estão sobre Γ, temos que um se encontra no interior de Γ e o outro no exterior.
(iv) Se P' está no exterior de Γ e T é um ponto sobre Γ tal que $P'T$ é tangente a Γ, então o pé da perpendicular de T sobre OP' é P, o inverso de P'. (Este fato segue do fato de que os triângulos OTP' e OPT são semelhantes).
(v) Se P está no interior de Γ e T é a intersecção da perpendicular a OP por P com a circunferência, então a tangente a Γ por T intersecta OP em P', o inverso de P.
(vi) Com a ajuda de (iv) e (v) é fácil construir com régua e compasso o inverso de um ponto.
(vii) O ponto O, centro da circunferência de inversão, não possui inverso.
(viii) Se A e B são extremos de um diâmetro de (O, r) então os pontos P e P' são **conjugados harmônicos** com relação a A e B, ou seja, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP'}{P'B}$.



Temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP'}{P'B} \Leftrightarrow \frac{r+OP}{r-OP} = \frac{r+OP'}{OP'-r} \Leftrightarrow (r+OP)(OP'-r) = (r+OP')(r-OP) \Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2.$$

(ix) Toda circunferência que passa por dois pontos inversos P e P' é ortogonal à circunferência de inversão.



Seja Q um dos pontos de intersecção de Γ com a circunferência Γ' que passa por P e P'. Como $OP \cdot OP' = r^2 = OQ^2$, (considerando a potência do O com relação a Γ'), temos que OQ é tangente a Γ'. Logo, Γ e Γ' são ortogonais.

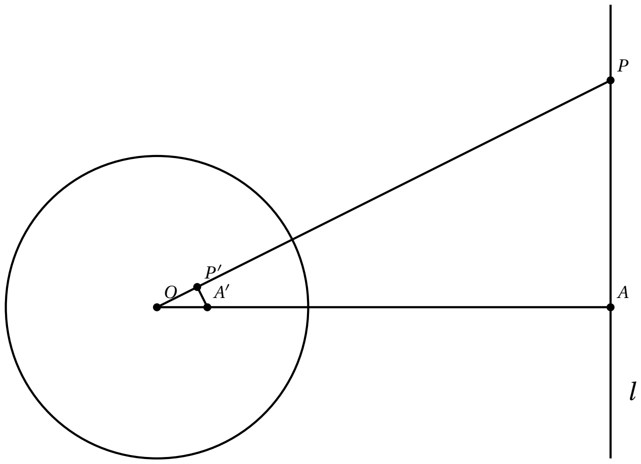
(x) Seja Γ' uma circunferência ortogonal a Γ. O inverso P', de um ponto P de Γ', se encontra também em Γ'.

Sejam P em Γ' e P' o ponto de intersecção da reta OP com Γ'. Para Q, o ponto comum às circunferências ortogonais Γ e Γ', temos que OQ é tangente a Γ'. Como a potência de O com relação a Γ' é $OQ^2 = OP \cdot OP'$, temos que P e P' são pontos inversos.

Teorema 1. Seja $\Gamma = (O, r)$ uma circunferência de inversão.
(i) Uma reta que passa por O, se inverte nela mesma.
(ii) O inverso de uma reta que não passa por O, é uma circunferência que passa por O.
(ii) O inverso de uma circunferência que passa por O, é uma reta que não passa por O.

Demonstração 1. (i) Para uma reta l que passa por O, é claro que o inverso de um ponto P de l, se encontra sobre l. Recorde que O é o único ponto que não possui inverso, o que na relaidade estamos querendo inverter a reta l sem o ponto O.

(ii) Sejam l uma reta que não passa por O, A o pé da perpendicular de O sobre l e A' o inverso de A.

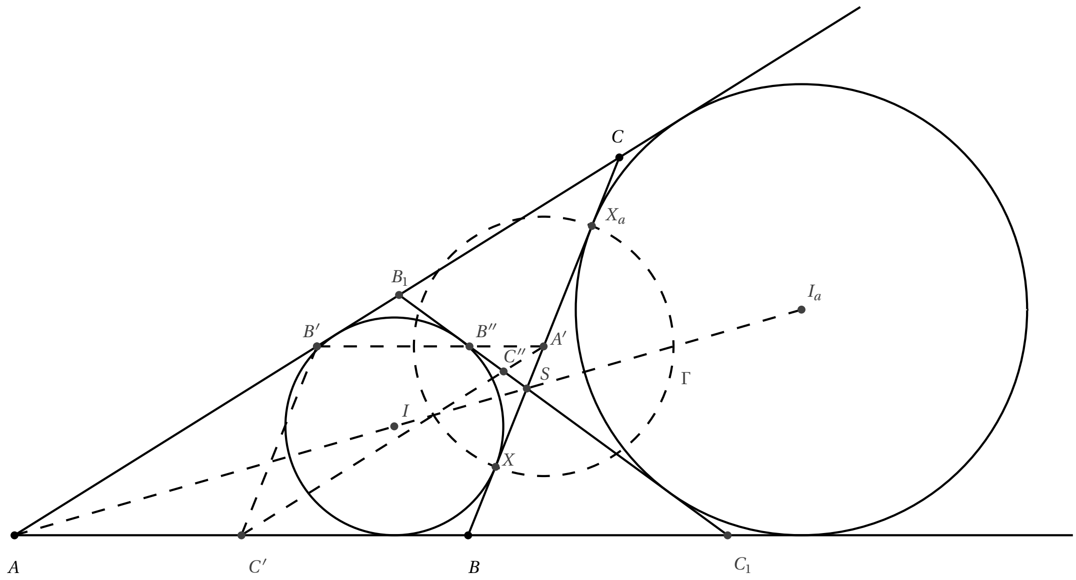


Sejam P um ponto de l e P' seu inverso, como $OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$, os triângulos OAP e $OP'A'$ são semelhantes. Porém OAP é um triângulo retângulo com ângulo reto em A, logo o triângulo $OP'A'$ é um triângulo retângulo com o ângulo reto em P', ou seja, P' se encontra sobre a circunferência de diâmetro OA'. Reciprocamente qualquer ponto P' de tal circunferência é inverso do ponto de intersecção da reta OP' com l. Assim o inverso de l é a circunferência de diâmetro OA', não incluindo o ponto O.

(iii) Basta seguir os passos inversos da demonstração de (ii).

Teorema 2. (**Feuerbach**) O círculo dos nove pontos de um triângulo é tangente à circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

Demonstração 2. A figura abaixo mostra o triângulo ABC, o triângulo formado pelos pontos médios A', B' e C', a circunferência inscrita com centro em I que tangencia BC no ponto X, o círculo ex - inscrito com centro em I_a que tangencia BC em X_a e uma tangente comum às circunferências B_1C_1 que intersecta os três lados do triângulo ABC. Temos também a circunferência Γ com diâmetro XX_a e os pontos S, B'', C'' que são as intersecções de B_1C_1 com BC, $A'B'$ e $A'C'$. Como Γ é ortogonal à circunferência inscrita e à circunferência ex - inscrita com, com centro em I_a, a inversão por Γ deixa ambos os círculos invariantes. Provaremos que Γ inverte o círculo dos nove pontos na reta B_1C_1.



Já sabemos que $BX = X_aC = p-b$, que o centro de Γ é A', ponto médio de BC e o diâmetro de Γ é $XX_a = |a-2(p-b)| = |b-c|$. O círculo dos 9 pontos passa pelo centro A' de Γ, ou seja, sua imagem pela inversão é uma reta. Vamos mostrar que essa reta passa por B'' e C'' e, portanto, passa por B_1 e C_1, mostrando que B'' e C'' são os inversos de B' e C', respectivamente. Sendo S o encontro da bissetriz interna relativa ao vértice A com o lado BC, já sabemos provar que $CS = \dfrac{ab}{b+c}$ e $SB = \dfrac{ac}{b+c}$ e que $SA' = |\dfrac{1}{2}(CS-BS)| = \dfrac{1}{2}|\dfrac{ab}{b+c} - \dfrac{ac}{b+c}| = |\dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}|$. Além disso, $BC_1 = |AC_1 - AB| = |AC - AB| = |b-c|$ e, de maneira análoga, $CB_1 = |b-c|$. Temos que $\Delta SA'B'' \sim \Delta SBC_1$ e $\Delta SA'C'' \sim \Delta SCB_1$, ou seja,

$$\frac{A'B''}{|b-c|} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{|b-c|}{2c}$$

e

$$\frac{A'C''}{|b-c|} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{|b-c|}{2b}.$$

Portanto, $A'B' \cdot A'B'' = \dfrac{c}{2}\dfrac{(b-c)^2}{2c} = \left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$ e $A'C' \cdot A'C'' = \dfrac{b}{2}\dfrac{(b-c)^2}{2b} = \left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2$. Assim, Γ, cujo raio mede $\dfrac{|b-c|}{2}$, inverte B' em B'' e C' em C'', como desejado. Finalmente, Γ mantém fixos pela inversão o círculo inscrito e a circunferência ex - inscrita de centro I_a e a tangente comum a esses círculos no círculo dos nove pontos e, com isso, provamos que o círculo dos nove pontos tangencia a circunferência inscrita e as três circunferências ex - inscritas.

Exercícios propostos

1. Seja ABC um triângulo com incentro I. Prove que se uma circunferência é tangente a BC e a AI em I, será também tangente ao círculo circunscrito ao triângulo ABC.

2. Seja ABC um triângulo com semi-perímetro p. Sejam D e E pontos sobre AB de maneira que $CD = CE = p$. Prove que a circunferência ex inscrita de ABC, relativa ao vértice C, é tangente ao círculo circunscrito ao triângulo CDE.

3. (Shortlist IMO) Sejam Γ_1, Γ_2, Γ_3 e Γ_4 circunferências distintas tais que Γ_1, Γ_3 são externamente tangentes em P, e Γ_2, Γ_4 são externamente tangentes no mesmo ponto P. Se Γ_1 e Γ_2; Γ_2 e Γ_3; Γ_3 e Γ_4; Γ_4 e Γ_1 intersectam - se em A, B, C, D, respectivamente, e todos esses pontos são diferentes de P, prove que

$$\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{PB^2}{PD^2}.$$

4. (Romênia) Seja ABC um triângulo e um ponto D sobre BC. Duas circunferências são tangentes exteriormente em um ponto M sobre o segmento AD, são tangentes à circunferência circunscrita ao triângulo ABC e são tangentes ao lado BC. Prove que AD é bissetriz do angulo $\angle A$.