Marcando ângulos

Gabriel Ribeiro Paiva
gabrielpaiva2002@gmail.com

Introdução

Marcar ângulo é a principal habilidade que se deve ter para destruir os problemas olímpicos de geometria. Ela é amplamente utilizada para resolver problemas mais fáceis (muitas vezes só marcando ângulos) e progredir em problemas difíceis (por mais que muitas vezes tenhamos que combiná-la com técnicas mais avançadas).

Nesta aula, irei introduzir essa técnica e mostrar o quanto ela pode ser poderosa, resolvendo até mesmo problemas de competições internacionais. Espero conseguir deixá-los tão maravilhados por geometria como eu fiquei :).

O básico

Aqui apresento as propriedades básicas que usaremos para provar as técnicas da aula:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.
- Dados A, B e C colineares, nessa ordem, temos que $\forall\, P$ no plano, $\angle ABP + \angle PBC = 180°$.
- Seja r uma reta e A, B e C pontos no plano, temos que $\angle ABC = \angle C'B'A'$, onde A' é o reflexo de A por r e B' e C' são definidos analogamente. Em especial, se ABC é um triângulo isósceles em B e r é a mediatriz de AC, temos que $\angle BAC = \angle ACB$.
- Seja P um ponto e A, B e C pontos no plano, temos que $\angle ABC = \angle A'B'C'$, onde A' é o reflexo de A por P e B' e C' são definidos analogamente.
- Marcar ângulos com retas paralelas (alternos internos e os outros aí; os nomes não são importantes, basta saber quem é igual a quem).

Perceba que eu me preocupei em escrever os ângulos sempre com a mesma orientação (no sentido horário ou anti-horário). Essa prática não é obrigatória, mas é importante para não se perder e conseguir visualizar melhor o que está acontecendo sem precisar de uma figura.

Ah, caso você queira usar ângulos orientados (recomendo olhar a referência no final), é obrigatório escrever a orientação correta (faz sentido, certo? :)).

Quadriláteros cíclicos

Aqui apresento os dois teoremas principais sobre o assunto:

Teorema 1 (Ângulo inscrito). *Se* $\angle ACB$ *está incrito em uma circunferência de centro* O*, temos que* $\angle BOA = 2\angle BCA$*.*

Solução. Olharei apenas o caso em que O está no interior de ACB (tente fazer o outro caso e ver porque orientar ângulos cobre os dois). Chame $\alpha = \angle OCA$, $\beta = \angle BCO$ e $\theta = \angle BCA = \alpha + \beta$.

Daí $\angle CAO = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 180° - 2\alpha$ e, analogamente, $\angle COB = 180° - 2\beta$

Concluímos que $\angle BOA = 360° - \angle AOC - \angle COB = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2\theta = 2\angle BCA$, como queríamos .

Problemas sobre o teorema

Problema 1. Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência ω. Mostre que $\angle ACB = 90° \iff AB$ é um diâmetro de ω.

Problema 2. Seja ABC um triângulo e H e O seu ortocentro e circuncentro, respectivamente. Prove que $\angle CAH = \angle OAB$.

Problema 3 (Ângulo de segmento). Seja ABC um triângulo e P um ponto tal que PC é tangente a (ABC) e P e A estão em semiplanos distintos definidos pela reta BC. Prove que $\angle PCB = \angle CAB$.

Teorema 2 (Quadriláteros cíclicos). *Dado um quadrilátero convexo* $ABCD$*, as seguintes condições são equivalentes:*

- *Existe uma circunferência passando por seus* 4 *vértices.*
- $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.
- $\angle ABD = \angle ACD$.

Solução. Para provar que a primeira condição implica as outras duas, basta usar o teorema anterior. Para provar que qualquer uma das outras duas implica a primeira, basta pegar o ponto D' na reta AD, tal que $ABCD'$ é cíclico e provar que $D = D'$, usando o teorema anterior .

Lemas conhecidos

Problema 1. Seja ABC um triângulo, M o ponto médio de BC e H seu ortocentro. Prove que os reflexos de H por M e por BC estão em (ABC).

Problema 2. Seja ABC um triângulo e I o seu incentro. Defina ainda $M = AI \cap (ABC)$ com $M \neq A$. Prove que $MI = MB = MC$. Prove também que o mesmo vale se trocarmos I pelo ex-centro relativo ao A do triângulo ABC.

Problema 3. Prove que um trapézio é isósceles se, e somente se seus vértices forem concíclicos.

Problemas

Problema 1. Considere um triângulo escaleno ABC com $AB < AC < BC$. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilátero $GOKU$ é cíclico, ou seja, que seus quatro vértices estão em uma mesma circunferência.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC. Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB. A reta ED intersecta a reta AB em G, enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H. Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 3. Seja ABC um triângulo escaleno e AM a mediana relativa ao lado BC. A circunferência de diâmetro AM intersecta pela segunda vez os lados AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente, ambos diferentes de A. Supondo que PQ é paralelo a BC, determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

Problema 4. Seja A um dos pontos de interseção de dois círculos com centros X e Y. As tangentes aos círculos em A intersectam novamente os círculos em B e C. Seja P o ponto de plano tal que $PXAY$ é um paralelogramo. Prove que P é o circuncentro do triângulo ABC.

Problema 5. Seja ABC um triângulo e O seu circuncentro. As retas AB e AC cortam o circuncírculo de OBC novamente em $B_1 \neq B$ e $C_1 \neq C$, respectivamente, as retas BA e BC cortam o circuncírculo de OAC em $A_2 \neq A$ e $C_2 \neq C$, respectivamente, e as retas CA e CB cortam o circuncírculo de OAB em $A_3 \neq A$ e $B_3 \neq B$, respectivamente. Prove que as retas A_2A_3, B_1B_3 e C_1C_2 passam por um mesmo ponto.

Desafios

Problema 1. Sejam ω_1 e ω_2 duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, que se cortam em dois pontos P e Q. Suponha que a circunferência circunscrita ao triângulo PC_1C_2 intersecte ω_1 novamente em $A \neq P$ e ω_2 novamente em $B \neq P$. Suponha ainda que Q está no interior do triângulo PAB. Demonstre que Q é o incentro do triângulo PAB.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Os pontos médios dos lados AB e AC são M e N, respectivamente. Sejam P e Q pontos na reta MN, tais que $\angle CBP = \angle ACB$ e $\angle QCB = \angle CBA$. A circunferência circunscrita ao triângulo ABP intersecta a reta AC em D $(D \neq A)$ e a circunferência circunscrita ao triângulo AQC intersecta a reta AB em E $(E \neq A)$. Mostre que as retas BC, DP e EQ são concorrentes.

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. O ponto P está no interior de $ABCD$. A seguinte igualdade é verdadeira:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Prove que as seguintes três retas se encontram num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a mediatriz de AB.

Referência

Recomendo a leitura do primeiro capítulo do livro EGMO, de Evan Chen, pois me baseei nele para escrever esse material. Lá você encontra toda a teoria sobre o assunto que precisa saber para ir bem nas olimpíadas.